



DISERTASI - SF 143501

**Desain *Microstrip Lines* Menggunakan
Metode *Conformal Mapping* Modular Baru
Berbasis Logaritmik Fungsi Identitas
Transformasi Joukowski**

ALI YUNUS ROHEDI

NRP. 1113301006

DOSEN PEMBIMBING

Prof.Ir.Eddy Yahya,M.Sc., Ph.D.

Dr.Yono Hadi Pramono, M.Eng.

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

PROGAM DOKTOR

BIDANG KEAHLIAN OPTOELEKTRONIKA

JURUSAN FISIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2017

Disertasi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Doktor
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

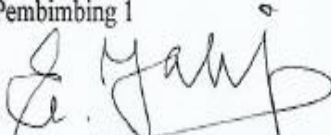
oleh:

Ali Yunus Rohedi
NRP:1113301006

Tanggal Ujian : 28 Juli 2017
Periode Wisuda : September


Disetujui oleh Tim Penguji Disertasi:

Pembimbing 1



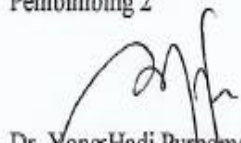
Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D.
NIP:194711261972101001

Penguji 1



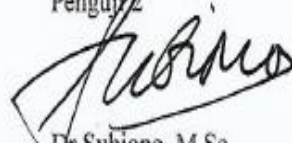
Prof. Dr. Arif Hidayat, M.Si.
NIP:196608221990031003

Pembimbing 2



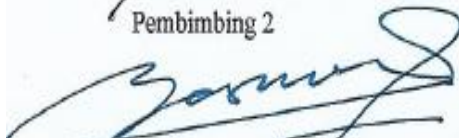
Dr. Yono Hadi Purnomo, M.Eng.
NIP:196909041992031003

Penguji 2




Dr. Subiono, M.Sc.
NIP:195704111984031001

Pembimbing 2



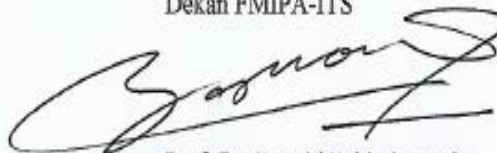
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP:196506051989031002

Penguji 3



Eko Setijadi, MT., Ph.D.
NIP:197210012003121002

Dekan FMIPA-ITS



Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP:196506051989031002

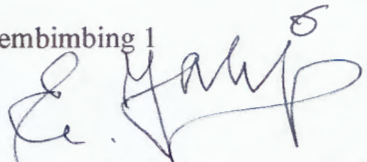
Disertasi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Doktor
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:
Ali Yunus Rohedi
NRP:1113301006

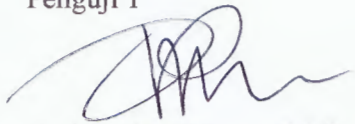
Tanggal Ujian : 28 Juli 2017
Periode Wisuda : September

Disetujui oleh Tim Penguji Disertasi:

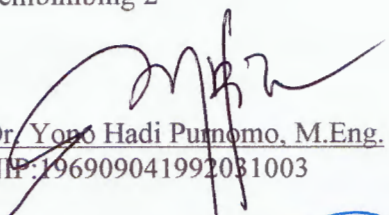
Pembimbing 1


Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D.
NIP:194711261972101001

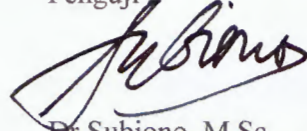
Penguji 1


Prof. Dr. Arif Hidayat, M.Si.
NIP:196608221990031003

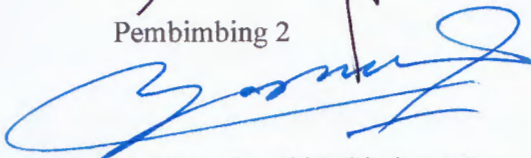
Pembimbing 2


Dr. Yono Hadi Purnomo, M.Eng.
NIP:196909041992031003

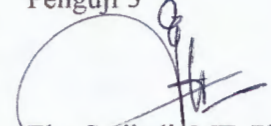
Penguji 2

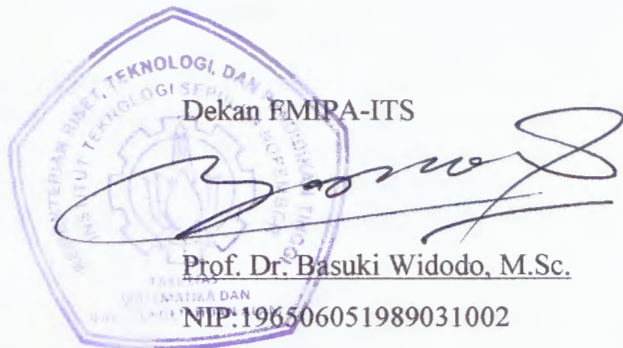

Dr. Subiono, M.Sc
NIP:195704111984031001

Pembimbing 2


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP:196506051989031002

Penguji 3


Eko Setijadi, MT., Ph.D.
NIP:197210012003121002


Dekan FMIPA-ITS
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP:196506051989031002

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DESAIN *MICROSTRIP LINES* MENGGUNAKAN METODE *CONFORMAL MAPPING* MODULAR BARU BERBASIS LOGARITMIK FUNGSI IDENTITAS TRANSFORMASI JOUKOWSKI

Nama : Ali Yunus Rohedi
NRP : 1113301006
Pembimbing : Prof.Ir. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D.
: Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng.
: Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

ABSTRAK

Sistem komunikasi nirkabel lazim menggunakan *microstrip lines* karena berbagai keuntungannya, antara lain strukturnya sederhana, berukuran kecil, gain dan efisiensinya tinggi, serta biaya pembuatannya murah. Kelemahan *microstrip lines* adalah masih sempitnya lebar pita frekuensi bila dibandingkan dengan fiber optik.

Berbagai upaya teknis telah dikembangkan untuk mengatasi kelemahan tersebut, namun dalam disertasi ini ditekankan pada aspek pendesainannya, yakni sejauh mana tingkat akurasi dari formula-formula yang digunakan. Sedangkan selama ini desain *microstrip lines* banyak bertumpu pada pemakaian formula umum kapasitansi dan/atau impedansi karakteristik eksak dalam bentuk fungsi integral eliptik yang diperoleh dengan metode *conformal mapping*. Oleh karena deret takhingga integral eliptik lengkap macam pertama penyusun fungsi integral eliptik adalah berkonvergensi rendah, maka desain *microstrip lines* umumnya dilakukan menggunakan pendekatan dari fungsi integral eliptik tersebut. Fungsi integral eliptik yang populer digunakan adalah yang diturunkan dengan pendekatan Hilberg.

Hingga kini hanya pendekatan Hilberg untuk tiga orde terendah saja yang lazim digunakan. Hal ini disebabkan rumitnya pemakaian skema original iterasi Hilberg dalam memformulasikan fungsi integral eliptik untuk pendekatan orde tinggi. Penerapan fungsi identitas transformasi Joukowski melahirkan skema iterasi baru pendekatan Hilberg yang dapat mengurangi langkah iterasi perumusan argumen logaritmik fungsi integral eliptik. Dengan skema iterasi baru tersebut argumen logaritmik pendekatan orde yang lebih tinggi dapat diformulasikan secara eksplisit sebagai fungsi dari argumen logaritmik pendekatan orde yang lebih rendah.

Implementasi formula modulus fungsi integral eliptik dari pendekatan Hilberg orde tiga pada pendesainan *microstrip lines* jenis CPW (*Coplanar Waveguide*) memberikan hasil perhitungan parameter geometri yang akurat untuk

setiap nilai tetapan dielektrik bahan yang digunakan dan nilai impedansi karakteristik yang dikehendaki.

Demikian pula, implementasi fungsi integral eliptik modular baru yang dikembangkan dalam disertasi ini mengkonfirmasi bahwa hasil perhitungan kapasitansi pendekatan Xiang untuk kapasitor pelat sejajar adalah tidak akurat terhadap kapasitansi eksak Palmer, karena suku kapasitansi *fringing field*nya selalu mendekati konstan untuk variasi rasio lebar dan jarak antar pelatnya. Hal ini berbeda dengan kontribusi suku *fringing field* dari model kapasitansi empiris baru yang diciptakan dalam disertasi ini, yang selain mendekati nilai kapasitansi eksak formula Palmer juga lebih akurat dibandingkan semua formula kapasitansi dari pendekatan yang ada. Kesesuaian model kapasitansi empiris baru terhadap kapasitansi eksak Palmer tersebut menghasilkan hipotesa baru bahwa suku *fringing field* kapasitor pelat sejajar dapat diformulasikan dalam fungsi integral eliptik.

Kata Kunci : *microstrip lines*, *conformal mapping*, transformasi Schwarz-Christoffel, integral eliptik, fungsi Joukowski.

DESIGN OF MICROSTRIP LINES BY USING THE METHOD OF NEW MODULAR CONFORMAL MAPPING BASED ON LOGARITHMIC OF THE TRANSFORMATION FUNCTION OF JOUKOWSKI IDENTITY

Name : Ali Yunus Rohedi
ID Number : 1113301006
Supervisor : Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D.
: Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng.
: Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

ABSTRACT

The wireless communications has commonly required the usage of microstrip lines due to its advantages, namely simple structure, small size, high in both of gain and efficiency, and low cost. The drawbacks of microstrip lines are having narrow linewidth of frequency compared to optical fiber.

Some efforts have been developed to overcome the drawbacks, nevertheless this dissertation is focused to explore the analytical aspect of designing, especially to developed some methods to enhance the accuracy of the common formulas used for designing the microstrip lines. As we know that the design of microstrip lines were based on the usage of general formulas of capacitance and/or characteristic impedance in the form of elliptic integral function obtained by using the method of conformal mapping. Due to the infinite series of complete elliptic integral of the first kind having low level of convergence, then the design of microstrip lines was commonly performed by using approximation formulas of the elliptic integral function. The approximations for the elliptic integral function that popularly used in designing microstrip lines were due to Hilberg's approximations.

Until now the only first three order of Hilberg's approximations that were commonly used for the application. This is because the usage of the original Hilberg's iteration schemes are so complicated in deriving high order of approximations. Applying transformation function of Joukowski identity has created the new iteration schemes for Hilberg approximations that can reduce the iteration step of obtaining logarithmic arguments of the elliptic integral function. By using the new iteration schemes, the logarithmic argument of the higher approximation can be formulated explicitly as function of logarithmic argument of the lower one.

The implementation of the approximate modulus formula of third order for designing CPW (Coplanar Waveguide) gives the accurate geometric parameters for both of the used dielectric constant and characteristic impedance.

Applying the new modular of elliptic integral function developed in this dissertation confirms that the capacitance calculation results of Xiang approximation for parallel-plate capacitor is not accurate compared to the exact capacitance due to Palmer, this is especially due to the fringing field term of the capacitance is always constant for variation of the ratio width and plates separation. It is different with the contribution of the fringing field term of the new empirical capacitance created in this dissertation, that besides approaching the value of exact capacitance due to Palmer but also more accurate compared to all of available approximate capacitance. The appropriate of the new empirical capacitance formula to the exact capacitance of parallel plate capacitor due to Palmer gives new hypothesis that the fringing field term of the capacitance can be presented in the form of elliptic integral function.

Key-words : microstrip lines, conformal mapping, Schwarz-Christoffel, elliptic integrals, Joukowski function

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya serta kesehatan kepada penulis sehingga Disertasi yang berjudul “**Desain Microstrip Lines Menggunakan Metode Conformal Mapping Modular Baru Berbasis Logaritmik Fungsi Identitas Transformasi Joukowski**” dapat terselesaikan meski masih jauh dari kesempurnaan.

Penulis menyadari bahwa terselesaikannya Disertasi ini tak lepas dari motivasi dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis haturkan ucapan terima kasih yang sedalam dalamnya kepada :

1. Semua keluarga khususnya istri dan anak tercinta atas segala doa dan dukungan motivasinya sehingga Disertasi ini dapat terselesaikan.
2. Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D., Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng, dan Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing yang senantiasa memberi arahan hingga terselesaikannya Disertasi ini.
3. Prof. Dr. Arif Hidayat, M.Si., Dr. Subiono, dan Eko Setijadi, MT. Ph.D. selaku Dosen Penguji atas saran dan kritik membangunnya demi kesempurnaan naskah Disertasi ini.
4. Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng. selaku Kepala Departemen Fisika FMIPA-ITS.
5. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dekan FMIPA-ITS.
6. Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Wali.
7. Prof. It. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D. selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Departemen Fisika FMIPA-ITS.
8. Segenap Staf Pengajar di Departemen Fisika FMIPA-ITS.
9. Segenap Staf Tendik dan Laboran di Departemen Fisika ITS.
10. Semua teman S3 seangkatan (2013) atas segala dukungan motivasinya.

Semoga Disertasi ini bermanfaat bagi kita semua. Aamiin YRA.

Surabaya, Agustus 2017

Penulis

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR ISI

| | |
|---|-----|
| LEMBAR PENGESAHAN DISERTASI..... | ii |
| ABSTRAK..... | v |
| ABSTRACT..... | vii |
| KATA PENGANTAR..... | ix |
| DAFTAR ISI..... | xi |
| DAFTAR TABEL..... | xii |
| DAFTAR GAMBAR..... | xv |
| BAB 1 PENDAHULUAN..... | 1 |
| 1.1.Latar Belakang | 1 |
| 1.2.Perumusan Masalah..... | 2 |
| 1.3.Tujuan Penelitian..... | 5 |
| 1.4.Manfaat Penelitian..... | 5 |
| BAB 2 DASAR TEORI..... | 7 |
| 2.1. <i>Microstrip Lines</i> | 7 |
| 2.2.Transmisi Garis..... | 9 |
| 2.3. Impedansi Karakteristik <i>Microstrip Lines</i> | 10 |
| 2.4. Parameter <i>Microstrip Lines</i> | 15 |
| 2.5. <i>Conformal Mapping</i> | 17 |
| 2.6.Transformasi Schawrz-Christoffel..... | 22 |
| 2.7.Penerapan Transformasi Schawrz-Cristoffel pada Perumusan Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar | 23 |
| 2.8.Formula Eksak dan Pendekatan untuk Impedansi Karakteristik <i>Microstrip Lines</i> | 27 |
| 2.9.Formula Pendekatan Hilberg Orde Satu untuk Fungsi Integral Eliptik..... | 29 |
| 2.10.Pengenalan Fungsi Identitas Joukowski..... | 30 |
| BAB 3 METODE PENELITIAN..... | 39 |
| 3.1. Skema Iterasi Baru Fungsi Integral Eliptik..... | 39 |
| 3.1.1.Skema <i>Original</i> Iterasi Hilberg untuk Pendekatan Fungsi Integral Eliptik..... | 42 |
| 3.1.2.Skema Baru Iterasi Hilberg Menggunakan Identitas Joukowski.. | 47 |
| 3.1.3. Perumusan Pendekatan Modulus untuk Fungsi Eliptik Integral.. | 52 |
| 3.1.4.Penurunan Formula Pendekatan Pi..... | 56 |
| 3.1.5.Perhitungan Nilai Fungsi Integral Eliptik Pendekatan..... | 57 |
| 3.1.6 Performansi Skema Iterasi Baru Pendekatan Hilberg..... | 59 |
| 3.2. Deret Takhingga Baru untuk Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama Beserta Peningkatan Tingkat Konvergensinya..... | 62 |
| 3.2.1.Perumusan Deret Takhingga Baru Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama..... | 65 |
| 3.2.2.Perumusan Fungsi Transformasi Baru untuk Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama | 68 |
| 3.2.3.Perbaikan Tingkat Konvergensi Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama..... | 73 |

| | |
|--|-----|
| 3.2.4. Tingkat Konvergensi Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama..... | 77 |
| 3.3 Formula Empiris Baru untuk Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar | 80 |
| BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN..... | 89 |
| 4.1. Desain <i>Microstrip Lines</i> Struktur CPW Menggunakan Formula Pendekatan Modulus Fungsi Eliptik Integral..... | 89 |
| 4.2. Analisis Konvergensi Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama..... | 98 |
| 4.3. Komparasi Hasil Perhitungan Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar dari Formula Xiang dan Formula Empiris Baru..... | 99 |
| 4.4. Pembahasan..... | 105 |
| 4.4.1. Capaian Penerapan Fungsi Identitas Transformasi Joukowski pada Rekonstruksi Fungsi Integral Eliptik Pendekatan Hilberg Orde Satu..... | 105 |
| 4.4.2. Capaian Penciptaan Skema Iterasi Baru Perumusan Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama untuk Perhitungan Fungsi Integral Eliptik pada Formula Impedansi Karakteristik Hasil Perumusan <i>Conformal Mapping</i> | 106 |
| 4.4.3. Capaian Penerapan Skema Iterasi Baru untuk Perumusan Pendekatan Modulus Fungsi Integral Eliptik..... | 107 |
| 4.4.4. Capaian Penerapan Formula Modulus Integral Eliptik Hasil Skema Baru Pendekatan Hilberg pada Pendesainan <i>Microstrip Lines</i> Struktur CPW..... | 107 |
| 4.4.5. Capaian dalam Mengkomparasi Perhitungan Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar..... | 108 |
| BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN..... | 111 |
| DAFTAR PUSTAKA..... | 113 |

DAFTAR TABEL

| | |
|---|-----|
| Tabel 3.1.Tiga Puluh Dua Angka Penting Nilai Eksak Fungsi Integral Eliptik dari Beberapa Nilai Modulus..... | 58 |
| Tabel 3.2.Jumlah Angka Penting Fungsi Integral Eliptik dari Empat Pendekatan Pertama Hilberg untuk Beberapa Nilai Modulus..... | 58 |
| Tabel 3.3.Komparasi Jumlah Angka Penting dari Nilai pendekatan Modulus untuk Empat Orde Pendekatan Pertama Hilberg..... | 59 |
| Tabel 3.4.Angka Penting Deret Takhingga $K(k)$ <i>Original</i> | 77 |
| Tabel 3.5.Nilai Eksak Integral Eliptik <i>Original</i> dan Versi Terbaru | 78 |
| Tabel 3.6.Suku Tertinggi l dari Deret Tak Hingga $K(k)$ dan $K(k)_N$ untuk Mencapai 16 Angka Penting..... | 78 |
| Tabel 4.1.Parameter Geometri CPW dengan Substrat FR4 ($\epsilon_r = 4.2$) untuk $r_1 = 1$ dan $r_1 = 1/5$ dengan $Z_{0g} = 50\Omega$ Menggunakan Formula Modulus Pendekatan Hilberg Orde Nol dan Orde Tiga..... | 95 |
| Tabel 4.2.Parameter Geometri CPW untuk $r_1 = 1$, dengan $\epsilon_r = 4.2$ dan $\epsilon_r = 5$ pada $Z_{0g} = 45\Omega$ dan $Z_{0g} = 50\Omega$ Menggunakan Formula Modulus Pendekatan Hilberg Orde Tiga | 96 |
| Tabel 4.3.Nilai Permittivitas Bahan Dielektrik CPW untuk Impedansi Tujuan $Z_{0g} = 50\Omega$ dan $Z_{0g} = 75\Omega$ Menggunakan Formula Modulus Pendekatan Hilberg Orde Tiga | 97 |
| Tabel 4.4.Jumlah Angka Penting Capaian Deret Takhingga Integral Eliptik dengan Enam Suku Deret dari Bentuk Original, Bentuk Baru dan Hasil Iterasi Pertamanya..... | 98 |
| Tabel 4.5.Capaian Jumlah Angka Penting Deret Takhingga $K_{m,\ell}(k)_N$ dan $K_{m,\ell}(k)$ untuk Suku Pertama ($\ell = 0$)..... | 99 |
| Tabel 4.6.Kapasitansi Persatuan Panjang Kapasitor Pelat Sejajar dari Formula Palmer..... | 100 |
| Tabel 4.7.Komparasi Kapasitansi Formula Pendekatan Xiang dan Formula Love terhadap Formula Kapasitansi Eksak Palmer..... | 102 |
| Tabel 4.8.Komparasi Kapasitansi Formula Empiris Baru terhadap Formula Mejis-Fokkema dan Formula Eksak Palmer..... | 104 |

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR GAMBAR

| | |
|---|-----|
| Gambar 2.1.Struktur Geometri <i>Microstrip</i> | 7 |
| Gambar2.2.Struktur <i>Microstrip Lines</i> yang Popular untuk Fabrikasi Antena..... | 9 |
| Gambar2.3.Rangkaian Ekvivalen Transmisi Garis..... | 10 |
| Gambar2.4.Ilustrasi <i>Conformal Mapping</i> dari Ranah Asal ke Ranah Bayangan..... | 18 |
| Gambar2.5. <i>Conformal Mapping</i> dengan Fungsi Transformasi Fungsi Integral Eliptik Macam Pertama..... | 20 |
| Gambar2.6. <i>Conformal Mapping</i> dengan Fungsi Transformasi Joukowski..... | 21 |
| Gambar2.7.Penentuan Sudut Interior <i>Polygon</i> pada Transformasi Schawrz-Christoffel..... | 23 |
| Gambar2.8.Kapasitor Pelat Sejajar | 24 |
| Gambar2.9.Garis Garis Medan Listrik pada Kapasitor Pelat Sejajar..... | 24 |
| Gambar2.10.Representasi Palmer untuk Kapasitor Pelat Sejajar | 25 |
| Gambar3.1.Komparasi Nilai Fungsi Integral Eliptik Hasil Skema Baru Pendekatan Hilberg Terhadap Hasil Metode Jacobi..... | 62 |
| Gambar3.2.Struktur Geometri Kapasitor Pelat Sejajar Beserta Garis-garis Medannya..... | 82 |
| Gambar4.1.Struktur Geometri CPW..... | 89 |
| Gambar4.2. (a). Plot Nilai $\frac{w}{d}$ Terhadap k , (b). Plot Nilai $\frac{w}{d}$ Terhadap $\left. \frac{C}{\epsilon \ell} \right _{Pal}$ | 101 |
| Gambar4.3. (a) Regresi dalam Ranah Linierisasi (b) Hasil Perhitungan Kapasitansi dengan Formula Empiris Baru..... | 103 |

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Peralatan komunikasi berubah secara drastis dari primitif ke modern sejak berkembangnya telegraf di tahun 1844 dan disusul penemuan telpon di tahun 1878 yang dikembangkan menggunakan peralatan listrik. Sistem peralatan listrik yang dinamakan transmisi garis (*Transmission Lines*) tersebut menghubungkan pengirim dan penerima. Pada kurun waktu yang sama berkembang pula pondasi Teori Radiasi Elektromagnet oleh Maxwell, yang mengantarkan Marconi di tahun 1897 dalam mengembangkan telegraf nirkabel. Kesuksesan Marconi mengirimkan pulsa *on-off* yang merupakan karakter telegraf tersebut menjadi pencetus penemuan peralatan pengirim sinyal suara yang sesungguhnya, yakni setelah ditemukannya penguat tabung vakum dan osilator pada kurun waktu 1904 hingga 1915. Sejak saat itu sistem komunikasi yang memanfaatkan pita radiasi elektromagnet tersebut berkembang pesat, mulai dari pita VLF (*Very Low Frequency*, 3-30KHz) untuk peralatan navigasi dan sonar, VHF (*Very High Frequency*, 30-300MHz) untuk siaran televisi dan radio FM, UHF (*Ultra High Frequency*, 300-3000MHz) untuk televisi dan komunikasi satelit, hingga EHF (*Extrime High Frequency*, 30-300GHz) untuk komunikasi radar (Collin, 1985).

Peralatan sederhana yang digunakan Marconi dalam membangkitkan pulsa *on-off* yang kemudian menjalar sepanjang ruang bebas antara pengirim dan penerima, menjadi cikal bakal antenna yang merupakan peralatan kunci dalam sistem komunikasi modern. Antena berfungsi untuk meradiasikan gelombang elektromagnet yang menjalar dari generator pemancar melalui transmisi garis untuk selanjutnya di *launching* ke ruang bebas. Sebaliknya antenna dapat pula menerima radiasi elektromagnet dari ruang bebas untuk disalurkan ke sistem transmisi garis menuju detektor penerima. Antena juga berfungsi sebagai penyesuai (*matching*) impedansi transmisi garis dan ruang bebas agar terjadi pantulan yang sekecil mungkin. Jenis antenna yang biasa digunakan antara lain: antenna dipol berisi dua kawat lurus yang diletakkan sesumbu, antenna loop berisi satu atau lebih gulungan kawat, antenna helix berisi sebuah kawat *helix* di atas *ground plane*, antenna kawat

(biasa digunakan dalam mobil, gedung, kapal laut, pesawat terbang, dll), antenna *horn*, dan antenna parabola yang tidak saja digunakan sebagai perangkat komunikasi melainkan juga sebagai peralatan radar dan astronomi (Sadiku, 1985).

Pada era tahun limapuluhan terjadi revolusi pembuatan antenna pemancar. Antenna jenis baru ini dikenal dengan sebutan *microstrip*. Implementasi *microstrip* tidak saja menyatukan transmisi garis dan sistem *pelaunching* sinyal dalam satu komponen, namun jangkauan frekuensinya pun dapat mencapai hingga orde GHz, sehingga cocok digunakan sebagai perangkat gelombang mikro dan radar. Konsep *microstrip* ini digagas oleh Deschamp di tahun 1953, tetapi pembuatannya baru berhasil direalisasikan pada tahun 1970 oleh Howell dan Munson. Berbagai keuntungan dari *microstrip* diantaranya bobotnya ringan, mudah pembuatannya, gain dan efisiensinya tinggi, fleksibel dibuat dalam bentuk jalur melengkung, serta biaya pembuatannya murah (Guha dan Yahia, 2011; Yuwono dan Pramono, 2005). Konfigurasi sederhana *microstrip* yang mirip PCB (*Print Circuit Board*) ini menjadikan teknologi pembuatannya mudah untuk dikembangkan. Dalam kurun waktu 20 tahun tersebut telah berhasil dibuat berbagai variasi *microstrip* yang lazim disebut *microstrip lines*, antara lain berstruktur CPS (*Coplanar Strip*), CPW (*Coplanar Waveguide*), dan *Stripline*. Bahkan *microstrip lines* telah berhasil dibuat secara *monolithic* dalam bentuk devais terintegrasi (Ramesh dkk, 2001). Walaupun banyak keuntungan yang disediakan *microstrip lines*, namun dalam aplikasinya masih terdapat kelemahan. Salah satu kelemahannya adalah masih sempitnya lebar pita (*bandwidth*) frekuensi bila dibandingkan dengan fiber optik. Rentang frekuensi dimana antenna *matching* terhadap impedansi masukan transmisi garisnya, sehingga 10% (bahkan di bawahnya) hilang karena faktor refleksi. Kuantitas lebar pita mencakup pula nilai rasio tegangan gelombang berdiri (VSWR) dan *return loss*, yang nilai keduanya bergantung pada nilai koefisien refleksi (Balanis, 1997; Pozar, 2001; Powell, 2001).

1.2. Perumusan Masalah

Sebagaimana dijelaskan oleh Balanis (1997), impedansi karakteristik *microstrip lines* merupakan faktor kunci dalam merealisasikan fungsinya sebagai penghubung *generator* pemancar dan *pelaunching* sinyal dalam sistem antenna. Pada desain *microstrip* sebagai contoh, formula eksak impedansi karakteristiknya telah

ditemukan oleh Schneider (1969) dalam bentuk fungsi integral eliptik yang diperolehnya dengan metode *conformal mapping*. Namun karena integral eliptik lengkap macam pertama penyusun fungsi integral eliptik tersebut berbentuk deret takhingga dengan tingkat konvergensi rendah, maka desain *microstrip* umumnya dilakukan menggunakan formula pendekatan. Formula pendekatan fungsi integral eliptik yang populer digunakan adalah yang diturunkan menggunakan pendekatan Hilberg (1969). Hingga kini terdapat tiga formula fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg yang lazim digunakan pada desain sistem antena, yakni pendekatan orde nol, orde satu, dan orde dua. Dalam upaya merumuskan pendekatan Hilberg untuk orde yang lebih tinggi, kajian awal disertasi ini telah berhasil merekonstruksi perumusan pendekatan Hilberg orde satu, yang selanjutnya dijadikan basis penciptaan skema iterasi baru pendekatan Hilberg orde tinggi. Rekonstruksi dilakukan melalui implementasi identitas Joukowski (Rohedi dkk, 2017a). Gagasan perumusan dan hasil perbaikan (*improvement*) metode perumusan impedansi karakteristik *microstrip lines* tersebut dituangkan dalam disertasi ini dengan judul “Desain *Microstrip Lines* Menggunakan Metode *Conformal Mapping* Modular Baru Berbasis Fungsi Identitas Transformasi Joukowski”. Pada disertasi ini juga dilaporkan hasil perbaharuan metode perumusan fungsi integral eliptik melalui implementasi skema iterasi baru untuk merumuskan deret takhingga integral eliptik penyusunnya (Rohedi dkk, 2017b). Pengembangan metode pembaharu fungsi integral eliptik tersebut disamping memudahkan perumusan impedansi karakteristik *microstrip lines*, juga memberikan hasil perhitungan yang akurat.

Sebagaimana diketahui, penerapan *conformal mapping* menggunakan transformasi Schwarz-Christoffel pada perumusan kapasitansi *microstrip lines* umumnya menghasilkan formula dalam bentuk implisit, sehingga demikian rumit dalam implementasinya. Oleh karena itu bilamana metode perumusan kapasitansi dan impedansi karakteristik *microstrip lines* yang menampilkan hubungan eksplisit terhadap faktor geometrinya telah tersedia, maka desain berikut pengungkapan makna fisis dari gejala pentransmisi gelombang elektromagnet akan menjadi mudah. Didasari fakta bahwa secara prinsip struktur geometri *microstrip lines* mirip dengan sistem kapasitor pelat sejajar, maka metode perumusan kapasitansi kapasitor pelat sejajar dapat diadopsi untuk merumuskan kapasitansi dan/atau

impedansi karakteristiknya. Sebagaimana diketahui kapasitansi kapasitor pelat sejajar berisi suku kapasitansi “tanpa” dan “dengan” *fringing field*. Pemisahan kedua suku kapasitansi kapasitor pelat sejajar tersebut hanya dapat dilakukan melalui transformasi modulus fungsi integral eliptik pada formula kapasitansinya. Pada kajian disertasi ini akan dilakukan pula *improvement* terhadap transformasi modulus gagasan Xiang (2006), yaitu dengan menghadirkan formula empiris kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang dibangun berbasis transformasi modulus dengan melibatkan fungsi identitas Joukowski (Rohedi dkk, 2017c). Transformasi serupa selanjutnya diimplementasikan pada pendesainan *microstrip lines* berstruktur CPW. Desain tersebut dilakukan menggunakan formula modulus fungsi integral eliptik yang memberikan parameter geometri CPW dengan nilai impedansi karakteristik yang sesuai untuk kriteria aplikasi antena.

Berdasar paparan latar belakang dan permasalahan di atas, selanjutnya dikemukakan perumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana cara merumuskan skema iterasi baru dengan fungsi transformasi identitas Joukowski untuk pendekatan Hilberg, sehingga menghasilkan formula pendekatan fungsi integral eliptik selain tiga formula pendekatan Hilberg yang ada dengan hasil perhitungan yang akurat.
2. Bagaimana cara merumuskan deret integral eliptik lengkap macam pertama berkonvergensi cepat yang dapat digunakan untuk perhitungan fungsi integral eliptik selain yang diperoleh dengan pendekatan Hilberg.
3. Bagaimana cara merumuskan fungsi integral eliptik modular baru (modulusnya tereksresi dalam bentuk baru) serta cara menerapkannya pada perumusan kapasitansi kapasitor pelat sejajar.
4. Bagaimana cara merumuskan impedansi karakteristik *microstrip lines* struktur CPW (*Coplanar Waveguide*) secara eksplisit sebagai fungsi parameter geometrinya.
5. Bagaimana cara menentukan parameter geometri CPW yang impedansi karakteristiknya sesuai untuk kriteria *matching* impedansi pada aplikasi antena.

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan utama Penelitian ini adalah :

1. Menerapkan fungsi identitas transformasi Joukowski untuk merekonstruksi fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde satu yang menjadi basis penciptaan skema iterasi baru pendekatan Hilberg.
2. Menciptakan skema iterasi baru perumusan deret integral eliptik lengkap macam pertama berkonvergensi cepat untuk perhitungan impedansi karakteristik *microstrip lines* hasil perumusan *conformal mapping*.
3. Menerapkan hasil skema iterasi baru pendekatan Hilberg untuk merumuskan formula pendekatan modulus fungsi integral eliptik.
4. Menerapkan formula pendekatan modulus pada pendesainan *microstrip lines* struktur CPW untuk aplikasi antena.
5. Mengkomparasikan validasi formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang tersusun atas suku “tanpa’ dan ‘dengan” *fringing field* hasil penerapan fungsi eliptik integral modular baru terhadap hasil perhitungan formula kapasitansi empiris dan formula pendekatan kapasitansi bentuk lainnya.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari Penelitian Disertasi ini diantaranya adalah:

1. Dapat merekonstruksi perumusan fungsi integral eliptik secara mudah tanpa melibatkan transformasi Jacobi dan fungsi theta.
2. Dapat melakukan perumusan deret integral eliptik lengkap macam pertama dan fungsi integral eliptik yang berkonvergensi cepat untuk perhitungan impedansi karakteristik *microstrip lines* yang diperlukan pada pendesainan antena dan aplikasi lain secara akurat.
3. Dapat mendesain *microstrip lines* dengan menggunakan formula pendekatan modulus fungsi integral eliptik representasi dari impedansi karakteristiknya.

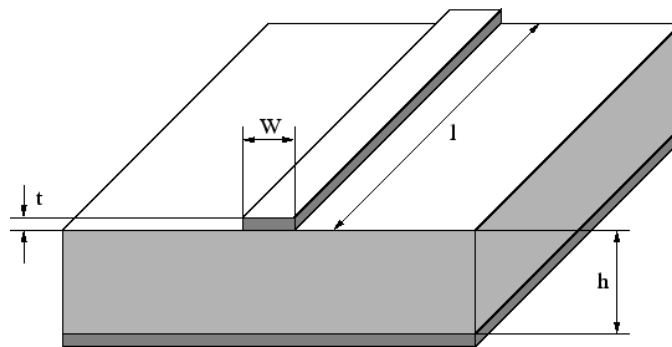
(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 2

DASAR TEORI

2.1. *Microstrip Lines*

Microstrip lines merupakan salah satu anggota rumpun transmisi garis yang amat populer pemakaiannya dalam bidang komunikasi nirkabel (*wireless*). Devais ini merupakan variasi dari struktur geometri *microstrip*. Sebagaimana tampak pada Gambar 2.1, *microstrip* tersusun atas substrat tipis dari bahan dielektrik berugi-rugi rendah (*low loss*) yang kedua sisinya dilapisi konduktor tipis (umumnya berupa tembaga).

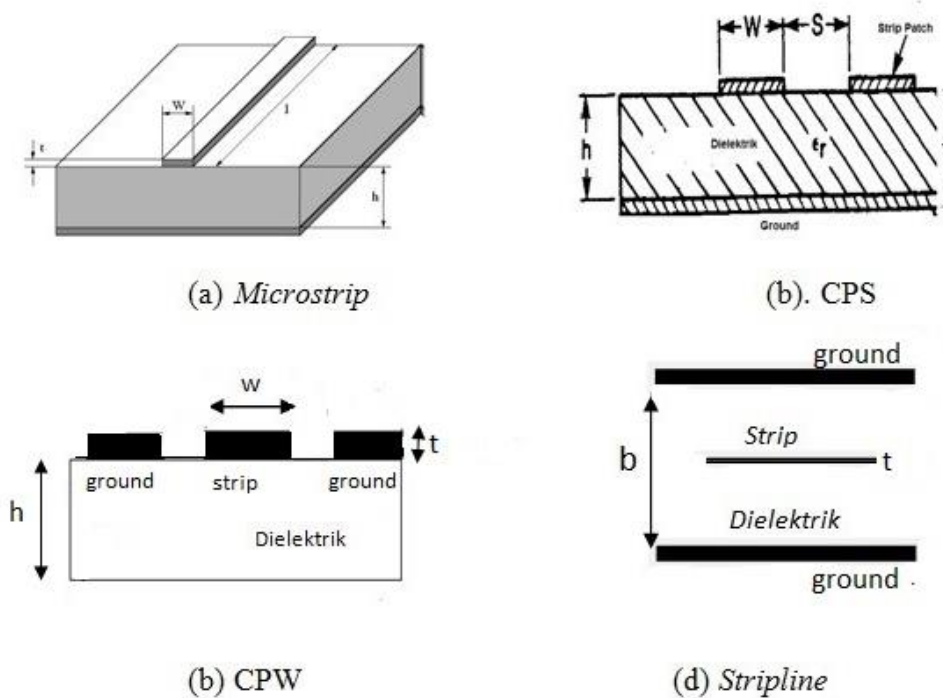


Gambar 2.1 Struktur Geometri *Microstrip*

Lapisan konduktor sisi atas dinamakan *strip* yang berfungsi sebagai jalur penyaluran sinyal gelombang, sedangkan konduktor sisi bawah berfungsi sebagai *ground plane*. Struktur *microstrip* dengan lebar *strip* yang jauh lebih sempit dibandingkan lebar *ground planenya* tersebut menyediakan berbagai keuntungan. Diantaranya bobotnya ringan, mudah pembuatannya, gain dan efisiensinya tinggi, fleksibel dibuat dalam bentuk jalur melengkung, serta harga pembuatannya murah (Guha dan Yahia, 2011; Yuwono dan Pramono, 2005). Konfigurasi *microstrip* yang mirip PCB (*Print Circuit Board*) tersebut menjadikan teknologi pembuatannya mudah untuk dikembangkan.

Merujuk pada hasil penelusuran pustaka, formula eksak impedansi karakteristik yang diperlukan untuk mendesain *microstrip* telah dirumuskan oleh

Schneider (1969) menggunakan metode *Conformal Mapping*, yaitu metode yang mentransformasi persoalan ranah asal (*domain*) ke dalam ranah bayangannya (*image*). Metode yang berbasis bilangan kompleks tersebut lazim diterapkan pada penyelesaian Persamaan Laplace yang diperlukan dalam perhitungan kapasitansi sistem transmisi garis. Transformasi antar kedua sistem koordinat kompleks untuk mendapatkan fungsi alihnya tersebut lazim dilakukan menggunakan transformasi Schwarz-Christoffel. Sebagaimana umumnya berlaku pada transmisi garis, impedansi karakteristik *microstrip* berbanding terbalik terhadap nilai kapasitansinya. Schneider mendapatkan nilai kapasitansi *microstrip* dalam ekspresi fungsi eliptik macam pertama $\varepsilon \frac{K(k')}{K(k)}$, dengan ε adalah permitivitas bahan dielektrik, sedangkan $K(k)$ adalah integral eliptik lengkap macam pertama, dengan k dan k' masing-masing adalah nilai modulus dan modulus komplemen yang nilainya bergantung pada faktor geometri, yakni rasio lebar strip (w) terhadap tebal dielektrik (h). Kerumitan formula eksak Schneider tampak dari hubungan $\frac{K(k')}{K(k)}$ terhadap $\frac{w}{h}$ yang terjalin secara implisit. Mengingat kerumitan prosedur penyelesaian persamaan implisit tersebut, dan didukung fakta kala itu belum berkembang komputer berkecepatan tinggi dalam melakukan perhitungan deret tak hingga integral eliptik lengkap macam pertama, Schneider tidak merekomendasikan pemakaian formula eksaknya, tetapi menyarankan pemakaian formula pendekatan yang diciptakannya. Setelah terpublikasinya formula impedansi karakteristik *microstrip* pendekatan Schneider tersebut, segeralah bermunculan formula pendekatan lainnya. Tiga formula pendekatan yang amat populer adalah formula Schneider, formula Wheeler, serta formula Hammerstad and Jensen, yang ketiganya terangkum pada Appendix B dalam buku Ramesh dkk (2001). Formula-formula pendekatan tersebut amat besar kontribusinya dalam pendesainan berbagai variasi dari struktur *microstrip* yang lazim dengan sebutan *microstrip lines*, diantaranya struktur CPS, CPW, dan *Stripline*.



Gambar 2.2 Struktur *Microstrip Lines* yang Popular untuk Fabrikasi Antena

Sebagaimana struktur tampak depan *microstrip lines* dalam Gambar 2.2, tampak depan CPS (*Coplanar Strip*) amat mirip dengan *microstrip*, hanya saja *strip* yang terletak di atas bahan dielektriknya lebih dari sebuah. Sementara itu struktur CPW (*Coplanar Waveguide*) tersusun atas *strip* pusat dan dua bidang *ground* yang semuanya dilapiskan di atas substrat dielektrik membentuk susunan tiga pandu gelombang planar sejajar. Adapun pada *stripline*, *strip* konduktornya terbenam di dalam bahan dielektrik.

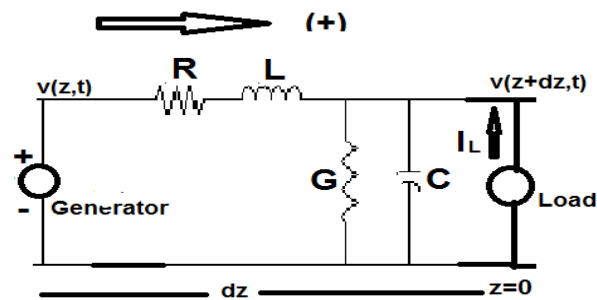
Pada sub bab 2.2 berikut dipaparkan kaitan impedansi karakteristik sistem transmisi garis terhadap parameter gelombang, sebagai bukti pentingnya impedansi karakteristik *microstrip lines* dalam berbagai aplikasinya.

2.2. Transmisi Garis

Transmisi garis merupakan struktur pemandu yang berfungsi sebagai alat pentransmisi daya atau informasi dari sumber (*generator*) ke beban (*load*), tepatnya sebagai pendistribusi daya listrik pada frekuensi rendah dan pendistribusi informasi pada frekuensi tinggi. Secara prinsip, transmisi garis berisi dua buah konduktor

(atau lebih) yang diletakkan sejajar untuk menghubungkan sumber dan beban, contoh : kabel koaksial (berisi dua *line* kembar), pelat sejajar (berisi dua *plane* kembar), kawat di atas bidang penghantar, dan *microstrip lines*. Kabel koaksial selain biasa dipakai sebagai penghubung antenna ke televisi (TV) juga bisa digunakan pada jaringan komputer dan internet. Sumber dapat berupa generator listrik, pemancar, dan osilator, sedangkan beban dapat berupa antenna dan osiloskop atau peralatan listrik lainnya.

Persoalan yang berkaitan dengan sifat penjararan gelombang dan aliran listrik dalam transmisi garis lazim diselesaikan dengan teori elektromagnet dan/atau teori rangkaian listrik. Analisa transmisi garis biasa dilakukan untuk model ideal, yaitu sistem berisi dua konduktor sehingga hanya dapat memasok gelombang moda TEM. Sebagaimana diketahui pada moda TEM, medan listrik (E) dan medan magnet (H) masing-masing dapat dianalogikan dengan tegangan (v) dan arus listrik (i). Karena itu untuk memudahkan penjabaran formula impedansinya, transmisi garis lazim dipresentasikan dalam bentuk rangkaian ekivalen sebagaimana pada Gambar 2.3, dalam hal ini resistansi R , induktansi L , konduktansi G , dan kapasitansi C semuanya diperjanjikan berkuantitas persatuan panjang (Dressel dan Gritner, 2002).



Gambar 2.3 Rangkaian Ekivalen Transmisi Garis

2.3. Impedansi Karakteristik *Microstrip Lines*

Sebagaimana disebutkan sebelumnya, *microstrip-lines* merupakan transmisi garis. Karena itu perumusan impedansi karakteristiknya dapat dilakukan merujuk pada model rangkaian ekivalen dalam Gambar 2.3. Pada model tersebut gelombang diasumsikan merambat sepanjang arah sumbu $+z$ dari generator

menuju beban. Secara tradisi perumusan diawali dengan menerapkan hukum Kirchoff untuk tegangan (*KVL-Kirchoff Voltage Law*) :

$$v(z, t) - R\Delta z i(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i}{\partial t} = v(z + \Delta z, t) , \quad (2.1)$$

dan dilanjutkan dengan penerapan hukum Kirchoff untuk arus (*KCL=Kirchoff Current Law*) :

$$i(z, t) - G\Delta z v(z + \Delta z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} = i(z + \Delta z, t) , \quad (2.2)$$

Untuk segmen jarak kecil ($\Delta z \rightarrow 0$), kedua persamaan di atas masing-masing tereduksi ke dalam bentuk

$$- Ri(z, t) - L \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} , \quad (2.3.a)$$

dan

$$- Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial z} . \quad (2.3.b)$$

Penyelesaian persamaan diferensial terkopel pada Pers.(2.3) akan menjadi mudah bila dilakukan dalam ranah bilangan kompleks. Sebagaimana diketahui tegangan listrik dan arus listrik merupakan kuantitas riil. Namun demikian pernyataan kedua kuantitas riil ini ke dalam bilangan kompleks tetap bisa dilakukan, yaitu dengan mendefinisikannya sebagai bagian riil dari suatu bilangan kompleks. Bilangan kompleks dimaksud berupa perkalian antar suku yang bergantung posisi (z) dan suku yang bergantung waktu (t). Ekspresi bilangan kompleks untuk tegangan adalah:

$$v(z, t) = \text{Re}[V(z)e^{j\omega t}] , \quad (2.4.a)$$

sedangkan untuk arus :

$$i(z, t) = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}] , \quad (2.4.b)$$

dalam hal ini $j = \sqrt{-1}$, sedangkan lambang Re menyatakan bagian riil dari bilangan kompleks. Adapun $V(z)$ dan $I(z)$ masing-masing adalah amplitudo tegangan dan amplitudo arus listrik sebagai fungsi posisi. Substitusi Pers.(2.4) ke dalam Pers.(2.3) memberikan

$$\frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L)I, \quad (2.5.a)$$

dan

$$\frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)V. \quad (2.5.b)$$

Kedua persamaan diferensial linier orde satu dalam Pers.(2.5) dapat direduksi ke dalam persamaan diferensial linier orde dua masing-masing dengan perubah tak bebas V dan I , yaitu

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \gamma^2 V = 0, \quad (2.6.a)$$

dan

$$\frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0, \quad (2.6.b)$$

dengan

$$\gamma^2 = (R + jX_L)(G + j\omega C). \quad (2.7)$$

Makna fisis parameter γ dalam Pers.(2.7) diketahui setelah mendefinisikan

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta, \quad (2.8.a)$$

yang memberikan definisi rugi-rugi perambatan :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{[R^2 + (\omega L)^2][G^2 + (\omega C)^2]}}, \quad (2.8.b)$$

dan jumlah gelombang sepanjang arah perambatan :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(RG + \omega^2 LC) + \sqrt{[R^2 + (\omega L)^2][G^2 + (\omega C)^2]}}. \quad (2.8.c)$$

Hal penting yang hendak diketahui dari penyelesaian Pers.(2.6) adalah kuantitas impedansi karakteristik transmisi garis (Z_0) dan impedansi masukan pada setiap jarak $z = -l$ dari posisi beban (Z_{in}). Untuk maksud ini titik asal ($z = 0$) diperjanjikan berada pada posisi beban (*load*), dimana tegangan dan arusnya bernilai $V_L = V_0$ dan $I_L = I_0$. Dengan definisi tersebut maka Z_0 dapat diperoleh dari

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0}, \quad (2.9)$$

sedangkan impedansi pada setiap posisi z dari beban diperoleh dari

$$Z = \frac{V(z)}{I(z)}. \quad (2.10)$$

Tampak bahwa nilai kedua impedansi Z_0 dan Z amat tergantung pada solusi dari Pers.(2.6). Solusi tegangan dalam Pers.(2.6.a) diberikan dalam bentuk

$$V(z) = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z}. \quad (2.11)$$

Penerapan nilai awal untuk tegangan dan nilai arus pada beban di $z = 0$ ke dalam Pers. (2.11) memberikan

$$V_L = A + B, \quad (2.12.a)$$

dan

$$\left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} = -(R + j\omega L)I_L. \quad (2.12.b)$$

Dengan mengasumsikan bahwa arus yang mengalir dari beban adalah $I_L = I_0$ pada $z = 0$, maka dari Pers.(2.11) dan Pers.(2.12.b) memberikan

$$-\frac{R + j\omega L}{\gamma} I_0 = A - B. \quad (2.12.c)$$

Merujuk pada Pers.(2.9), maka ruas kiri Pers.(2.12.c) memberikan definisi impedansi karakteristik komplek :

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma}. \quad (2.13)$$

Adapun kombinasi linier Pers.(2.12.a) dan Pers.(2.12.c) memberikan hubungan :

$$A = \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0), \quad (2.14.a)$$

dan

$$B = \frac{1}{2}(V_L + I_L Z_0). \quad (2.14.b)$$

Pada Pers.(2.13) di atas Z_0 merupakan impedansi komplek transmisi garis. Nilai impedansi pada setiap posisi z yang populer dengan sebutan impedansi masukan sesuai definisi $Z_{in} = Z(z = -l)$ dapat diketahui melalui definisi impedansi dalam Pers.(2.10). Langkah penjabarannya diawali dengan mendapatkan ekspresi $V(z)$ yaitu dengan mensubstitusi Pers.(2.14.a) dan Pers.(2.14.b) ke dalam Pers.(2.11).

$$V(z) = \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0)e^{\gamma z} + \frac{1}{2}(V_L + I_L Z_0)e^{-\gamma z}, \quad (2.15.a)$$

yang kemudian dituliskan dalam bentuk

$$V(z) = V_L \left(\frac{e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}}{2} \right) - I_L Z_0 \left(\frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} \right), \quad (2.15.b)$$

atau

$$V(z) = V_L \cosh(\gamma z) - I_L Z_0 \sinh(\gamma z). \quad (2.15.c)$$

Substitusi $V(z)$ ke dalam Pers.(2.5.a) memberikan $I(z)$ dalam bentuk

$$I(z) = -\frac{1}{Z_0} [V_L \sinh(\gamma z) - I_L Z_0 \cosh(\gamma z)] \quad (2.15.d)$$

Dengan demikian impedansi pada setiap posisi z dari posisi beban dalam Pers.(2.10) terekspresi dalam bentuk

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{V_L \cosh(\gamma z) - I_L Z_0 \sinh(\gamma z)}{-V_L \sinh(\gamma z) + I_L Z_0 \cosh(\gamma z)}, \quad (2.16.a)$$

mengingat $Z_L = \frac{V_L}{I_L}$ maka,

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - Z_0 \tanh(\gamma z)}{Z_0 - Z_L \tanh(\gamma z)}. \quad (2.16.b)$$

Merujuk pada definisi $Z_{in} = Z(z = -l)$ maka ekspresi impedansi masukan transmisi garis diperoleh dalam bentuk :

$$Z_{in}(l) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma l)}, \quad (2.17.a)$$

dan dengan menggunakan hubungan $\tanh(\gamma l) = j \tan(\beta l)$ maka Pers.(2.17a) lazim dituliskan dalam bentuk

$$Z_{in}(l) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}. \quad (2.17.b)$$

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya bahwa parameter terpenting suatu transmisi garis adalah impedansi karakteristiknya. Transmisi garis ideal yakni yang tidak memiliki rugi-rugi dipresentasikan dengan nilai $R = 0$ dan $G = 0$, sehingga dari pada Pers.(2.8.a) didapatkan pula bahwa

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} . \quad (2.18)$$

Karena itu berdasar Pers.(2.13) maka transmisi garis ideal akan memiliki impedansi karakteristik riil sebesar

$$Z_0 = \frac{j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (2.19)$$

Nilai induktansi diri L dan kapasitansi C masing-masing berhubungan dengan sifat kemagnetan dan kelistrikan. Namun karena kedua kuantitas tersebut satu sama lain terhubung melalui definisi kecepatan fasa gelombang, maka pada perhitungan impedansi karakteristik transmisi garis hanya salah satu yang digunakan, yakni kuantitas kapasitansi C . Tampak bahwa untuk semua struktur transmisi garis nilai impedansi karakteristiknya berbanding terbalik dengan kapasitansinya (Wen, 1969), yaitu

$$Z_0 = \frac{1}{v_{ph} C} , \quad (2.20)$$

dengan kecepatan fasa $v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, untuk c cepat rambat cahaya dalam ruang hampa dan ϵ_r permitivitas relatif bahan penyusun transmisi garis.

2.4. Parameter *Microstrip Lines*

Terdapat tiga parameter antenna yang nilainya terkait langsung dengan impedansi karakteristiknya, yakni Koefisien Refleksi, VSWR, dan Bandwidth. Koefisien refleksi menunjukkan ukuran seberapa porsi daya yang direfleksikan oleh beban terhadap sinyal datang. Mengacu pada model rangkaian ekivalen dalam Gambar 2.3, koefisien refleksi tersebut didefinisikan sebagai

$$\Gamma = \frac{V_L^-}{V_L^+} , \quad (2.21)$$

dengan V_L^- dan V_L^+ masing-masing adalah tegangan maksimum terpantul dan tegangan maksimum datang sesuai Pers.(2.11), yaitu

$$V(z) = V_L^+ e^{-jz} + V_L^- e^{jz} . \quad (2.22)$$

Akibatnya impedansi dalam Pers.(2.10) menjadi

$$Z(z) = Z_0 \frac{V_L^+ e^{-\gamma z} + V_L^- e^{\gamma z}}{V_L^+ e^{-\gamma z} - V_L^- e^{\gamma z}}. \quad (2.23)$$

Selanjutnya Pers.(2.23) dapat dinyatakan dalam koefisien refleksi sesuai Pers.(2.21), yaitu

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{2\gamma z}}{1 - \Gamma e^{2\gamma z}}. \quad (2.24)$$

Pada beban, yaitu pada $z = 0$, Pers.(2.24) memberikan

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}. \quad (2.25)$$

Dengan demikian dari Pers.(2.25) dapat diketahui bahwa koefisien refleksi terformulasi dalam bentuk

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}. \quad (2.26)$$

Parameter kedua adalah VSWR, yang merupakan ukuran seberapa besar rasio tegangan maksimum terhadap tegangan minimum pada setiap posisi dari beban. Perumusan formula VSWR ini diawali dengan menyatakan tegangan dalam Pers.(2.22) sebagai fungsi koefisien refleksi dalam Pers.(2.26), yaitu

$$V(z) = V_L^+ e^{-\gamma z} (1 + \Gamma e^{2\gamma z}). \quad (2.27)$$

Dari penjabaran diperoleh bahwa tegangan maksimum terjadi manakala

$$e^{2\gamma z + j\alpha} + e^{-2\gamma z - j2\alpha} = 2, \quad (2.28.a)$$

sedangkan tegangan minimum terjadi bila,

$$e^{2\gamma z + j\alpha} + e^{-2\gamma z - j\alpha} = -2. \quad (2.28.b)$$

Dengan syarat tersebut tegangan maksimum dan minimum berturut-turut diperoleh dalam bentuk

$$|V(z)|_{\max} = |V_L^+| (1 + |\Gamma|), \quad (2.29.a)$$

dan

$$|V(z)|_{\min} = |V_L^+| (1 - |\Gamma|). \quad (2.29.b)$$

Dengan demikian nilai VSWR didapatkan terformulasi sebagai fungsi dari nilai mutlak koefisien refleksi

$$VSWR = \frac{|V(z)|_{\max}}{|V(z)|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}. \quad (2.30)$$

Sebaliknya nilai mutlak koefisien refleksi dapat ditentukan dari VSWR sesuai formula

$$|\Gamma| = \frac{VSWR-1}{VSWR+1}. \quad (2.31)$$

Nilai VSWR akan optimal ketika $|\Gamma| = 0$ sehingga $VSWR = 1$. Pada kondisi ini seluruh daya yang dipancarkan ke antena tidak ada yang dipantulkan. Dapat disimpulkan bahwa VSWR dapat bernilai dari 1 hingga takhingga, namun untuk pendesaianan antena nilai VSWR ditoleransi dalam rentang $1 < VSWR \leq 2$.

Parameter ketiga yang terkait dengan nilai impedansi karakteristik antena adalah lebar pita frekuensi yang lazim disebut *bandwidth* (*BW*), yang merupakan rentang frekuensi kerja antena. *Bandwidth* biasa dinyatakan dalam bentuk prosentase, karena sifatnya yang konstan relatif terhadap frekuensi. Persen *bandwidth* didefinisikan sebagai,

$$BW = \frac{f_h - f_l}{f_c} \times 100\% \quad (2.32)$$

dengan f_h adalah frekuensi tertinggi, f_l adalah frekuensi terendah, sedangkan

$f_c = \frac{f_h + f_l}{2}$ adalah frekuensi tengah dalam *band*.

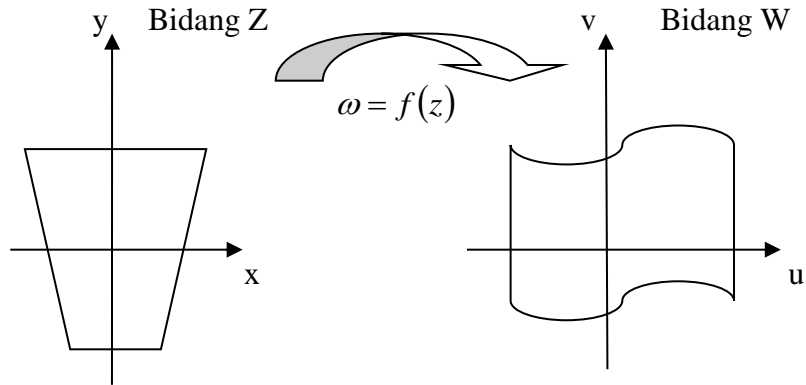
2.5. Conformal Mapping

Conformal mapping merupakan metode untuk mendapatkan solusi persoalan syarat batas dengan cara mentransformasikan perbatasan awal yang rumit ke dalam bentuk perbatasan yang lebih sederhana agar persoalannya menjadi mudah untuk diselesaikan (Kouzaev, 2013). Pada *conformal mapping*, ranah asal dan ranah bayangan dari setiap bentuk perbatasan dipresentasikan dalam bilangan kompleks. Ranah asal biasanya dinyatakan dalam Argand diagram (koordinat bilangan kompleks) $z = x + jy$, sedangkan ranah bayangan dinyatakan dalam diagram Argand $\omega = u + jv$. Ranah asal diperjanjikan berada pada bidang Z,

sedangkan ranah bayangan diperjanjikan berada pada bidang W. Skema transformasi dari bidang Z ke bidang W menggunakan fungsi kompleks $\omega = f(z)$,

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y), \quad (2.33)$$

diilustrasikan dalam Gambar 2.4 berikut,



Gambar 2.4 Ilustrasi *Conformal Mapping* dari Ranah Asal ke Ranah Bayangan

Merujuk pada skema transformasi tersebut, setiap titik $x + jy$ pada bidang kompleks Z dapat menemukan titik yang bersesuaian (*corresponding point*) $u + jv$ pada bayangannya di bidang kompleks W. Pada proses ini $f(z)$ dikatakan memetakan titik $x + jy$ ke titik $u + jv$ sedemikian rupa sehingga deretan titik di bidang Z akan dipetakan menjadi deretan titik di bidang W. Pemetaan tersebut terlaksana bilamana $f(z)$ merupakan fungsi analitik, yaitu nilainya eksis dan unik di sekitar titik z_0 . Dengan kata lain $f(z)$ memiliki nilai turunan pertama sesuai definisi

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (2.34)$$

Oleh karena pada setiap arah dalam bidang Z kuantitas Δz berupa titik, maka perubahan dalam bidang Z akan memberi konsekuensi perubahan pada bidang W. Konsekuensi tersebut dapat dibuktikan dari derivatif pertama, masing-masing untuk arah riil dan arah imajiner. Peletakan Δz sepanjang arah riil $\Delta z = \Delta x$ memberikan

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + j \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.35.a)$$

Sedangkan untuk arah imajiner $\Delta z = \Delta y$ memberikan

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + j \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.35.b)$$

Dari kedua persamaan arah dalam Pers.(2.35.a) dan Pers.(2.35.b) tersebut diperoleh Persamaan Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.36)$$

yang merupakan syarat analitik yang harus dipenuhi setiap fungsi kompleks. Dengan syarat Cauchy-Riemann tersebut dapat diketahui bahwa setiap titik dalam bidang W , absis u dan ordinatnya v sama-sama memenuhi Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.37.a)$$

dan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (2.37.b)$$

Kedua persamaan dalam Pers.(2.37) memberi konsekuensi bilamana suatu fungsi dalam ranah asal memenuhi Persamaan Laplace, sebut saja fungsi potensial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (2.38.a)$$

maka dalam ranah bayangannyapun fungsi potensial tersebut invarian, yakni tetap memenuhi Persamaan Laplace,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0. \quad (2.38.b)$$

Dalam *conformal mapping*, terdapat dua fungsi transformasi yang amat populer, yakni fungsi integral eliptik “tak lengkap” macam pertama dan fungsi Joukowski. Fungsi integral eliptik tak lengkap macam pertama adalah dalam bentuk $\omega = sn^{-1}(z, k)$, yang dalam bentuk integral adalah (Nehari, 1952),

$$\omega = F(z, k) = C \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad (2.39)$$

dengan C adalah tetapan skala. Dari Pers.(2.39) selanjutnya terdefinisi

$$F(1, k) = K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad (2.40.a)$$

$$F(1, k') = K(k') = K'(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}}, \quad (2.40.b)$$

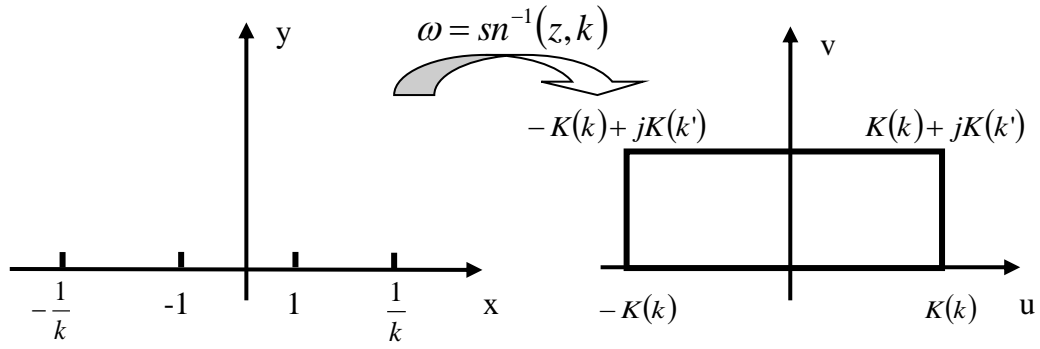
dan

$$F(\pm 1/k, k) = \pm K(k) + jK(k'). \quad (2.40.c)$$

Adapun integral eliptik tak lengkap macam kedua adalah dalam bentuk

$$E(z, k) = C' \int_0^z \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2 x^2}} dx, \quad (2.40d)$$

dengan C' adalah tetapan skala. Pers.(2.39) mentransformasi garis ke bentuk persegi panjang sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 2.5 berikut,



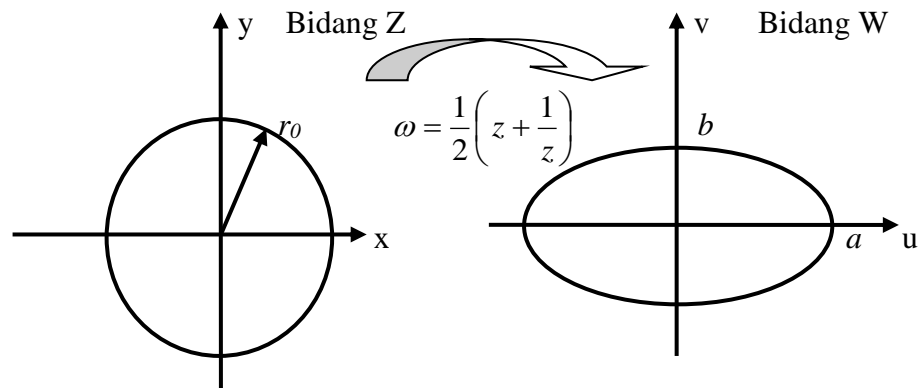
Gambar 2.5 *Conformal Mapping* dengan Fungsi Transformasi Fungsi Integral Eliptik Macam Pertama

Tampak bahwa titik $x = -1$ pada ranah asal dipetakan menjadi titik $-K(k)$ di ranah bayangan, titik $x = 1$ dipetakan menjadi titik $K(k)$, titik $x = -\frac{1}{k}$ dipetakan menjadi titik $-K(k) + jK(k')$, dan titik $x = \frac{1}{k}$ dipetakan menjadi titik $K(k) + jK(k')$, dalam hal ini k dan $k' = \sqrt{1 - k^2}$ masing-masing dinamakan modulus dan modulus komplemen yang nilainya bergantung pada faktor geometri.

Adapun fungsi transformasi Joukowski (Liang, 2010) adalah dalam bentuk

$$\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (2.41)$$

yang mentransformasi lingkaran beradius r_0 satuan ke bentuk elip bersumbu mayor a dan sumbu minor b sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 2.6 berikut,



Gambar 2.6 *Conformal Mapping* dengan Fungsi Transformasi Joukowski

Verifikasi terhadap fungsi pemetaan tersebut dilakukan melalui penjabaran,

$$\begin{aligned}
\omega &= z + \frac{1}{z} \\
\omega &= x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{1}{x^2 + y^2} (x - iy) = u(x, y) + jv(x, y) \\
\rightarrow u(x, y) &= x \left(1 + \frac{1}{r^2} \right), v(x, y) = y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \\
r = r_0 \rightarrow \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= x^2 + y^2; \quad a = 1 + \frac{1}{r_0}, b = 1 - \frac{1}{r_0}
\end{aligned} \quad , \quad (2.42)$$

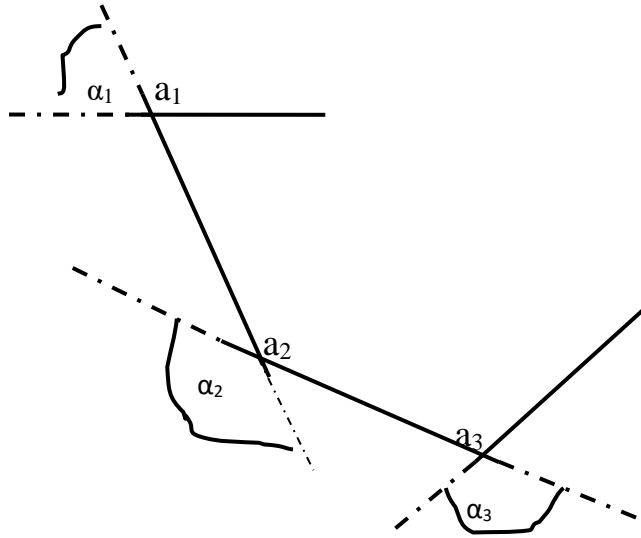
Menurut Pustaka, *conformal mapping* menggunakan fungsi transformasi Joukowski umumnya diterapkan pada bidang Aerodinamis dan Hidrodinamis, terutama untuk menentukan medan “*stream-line*” fluida. Namun demikian, *invers* dari fungsi transformasi Joukowski yang berbentuk

$$\omega = z - \sqrt{z^2 - 1} \quad , \quad (2.43)$$

lazim digunakan dalam elektrostatika.

2.6 Transformasi Schawrz-Christoffel

Jauh sebelum Nehari (1952) menyimpulkan bahwa fungsi eliptik tak lengkap macam pertama dapat mentransformasi garis pada ranah asal ke bentuk persegi panjang dalam ranah bayangan sebagaimana dibahas pada subbab sebelumnya, Schawrz dan Chistoffell secara terpisah telah mengembangkan metode pemetaan (*mapping*) deretan titik pada sumbu riil bidang Z ke dalam bentuk *polygon* dalam bidang W. Sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 2.7, *polygon* digambarkan tersusun atas segmen-segmen garis yang masing-masing berkemiringan tetap dan sudut perpotongan antar dua segmen garis dinyatakan dengan sudut interior α_n dan titik perpotongan antar dua garis a_n (Nehari,1952; Cattaneo,2010).



Gambar 2.7. Penentuan Sudut Interior *Polygon* pada Transformasi Schawrz-Christoffel

Hubungan fungsi transformasi $\omega = f(z)$ dan z dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial berikut,

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{A}{\prod_{n=1}^N (\omega - u_n)^{1 - \frac{\alpha_n}{\pi}}}, \quad (2.44)$$

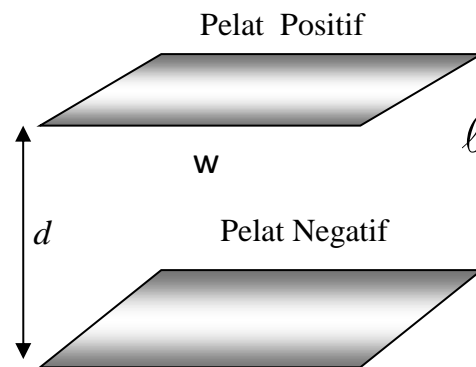
dengan u_n adalah titik-titik pada sumbu riil pada bidang W , sudut α_n adalah sudut interior pada setiap vertek *polygon*, dengan tetapan A berfungsi sebagai tetapan skala. Sebaliknya pernyataan persamaan diferensial untuk hubungan fungsi transformasi $z = f(\omega)$ dan ω adalah dalam bentuk:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{B}{\prod_{n=1}^N (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}}}, \quad (2.45)$$

dengan x_n adalah titik-titik pada sumbu riil dalam bidang Z , dengan B adalah tetapan skala.

2.7. Penerapan Transformasi Schawrz-Cristoffel pada Perumusan Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar

Hal yang menarik dari penerapan *conformal mapping* dengan transformasi Schawrz- Cristoffel dijumpai pada perumusan kapasitansi kapasitor pelat sejajar (panjang ℓ , lebar w dan jarak antar pelat d) yang dilakukan oleh Palmer(1937) dan Collin (2001) dalam upayanya melibatkan pengaruh *fringing field* ke dalam perhitungannya.

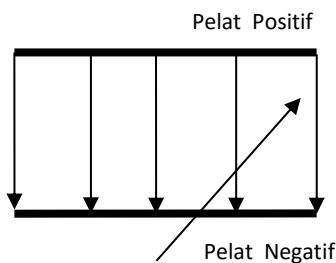


Gambar 2.8 Kapasitor Pelat Sejajar

Jika pengaruh *fringing-field* diabaikan sebagaimana terlihat pada tampak depan kapasitor pelat sejajar pada Gambar 2.9.a, maka perhitungan kapasitansi persatuan panjang kapasitor pelat sejajar dapat dilakukan dengan hukum Gauss dan Persamaan Laplace kartesian dimensi satu. Hasilnya adalah

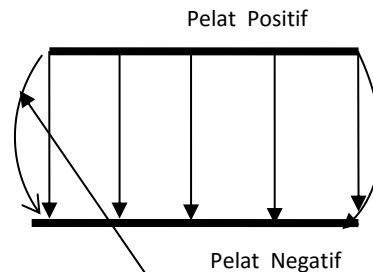
$$C = \varepsilon \frac{w}{d}, \quad (2.46)$$

dengan ε adalah permitivitas ruang antar kedua pelat.



Garis-garis medan diantara kedua pelat

2.9.a tanpa *fringing Field*



Garis-garis medan keluar dari tepi pelat

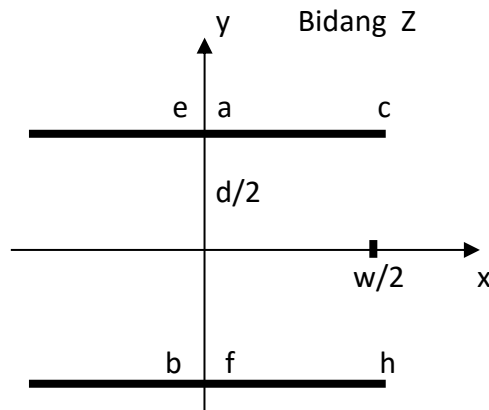
2.9.b dengan *fringing field*

Gambar 2.9 Garis Garis Medan Listrik pada Kapasitor Pelat Sejajar

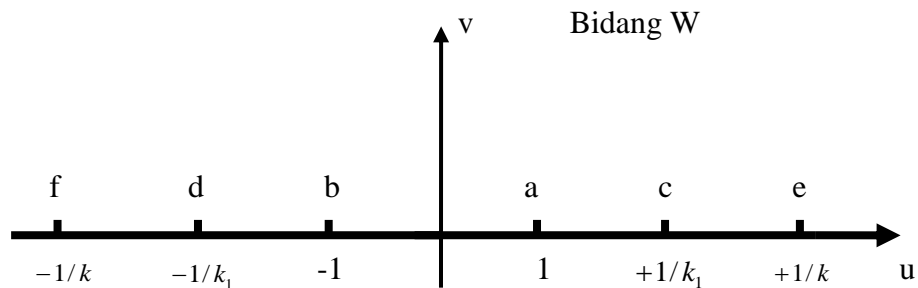
Namun ketika pengaruh *fringing field* turut diperhitungkan sebagaimana tampak pada Gambar 2.9.b, maka hukum Gauss dan persamaan Laplace koordinat kartesian dimensi satu tersebut tidak dapat mengakomodir luberan garis-garis medan melengkung yang keluar dari tepi pelat positif menuju tepi pelat negatif. Walaupun Palmer dan Collin sama-sama mendapatkan kapasitansi persatuan panjang dalam fungsi integral eliptik, yakni:

$$C = \varepsilon \frac{K(k')}{K(k)} , \quad (2.46)$$

namun mereka mendapatkan nilai modulus k yang berbeda. Walaupun demikian modulus k yang berkaitan dengan faktor geometri lebar jarak antar pelat kapasitor pelat sejajar tersebut sama-sama didapakkannya dalam bentuk persamaan implisit. Palmer mempresentasikan tampak depan dan hasil transformasi kapasitor pelat sejajar dalam bidang Z dan bidang W berikut,



a. Ranah Asal (Bidang Z) Palmer untuk Kapasitor Pelat Sejajar



b. Ranah Bayangan (Bidang W) Palmer untuk Kapasitor Pelat Sejajar

Gambar 2.10 Representasi Palmer untuk Kapasitor Pelat sejajar

Oleh karena bidang bayangan terletak pada separuh atas bidang kompleks, Palmer memetakan masing-masing pelat atas tiga vertek, yaitu e,a,c untuk pelat positif dan b,f,h untuk pelat negatif. Vertek c dan h mewakili bagian panjang pelat yang nilainya menuju takhingga sehingga sudut interiornya bernilai 2π radian, sedangkan sudut interior keempat vertek lainnya adalah $\pi/2$ radian. Dengan definisi sudut interior tersebut, maka sesuai dengan Pers.(2.44) Palmer mendapatkan

$$Z = A \int \frac{du}{(u+1)^{1/2}(u+1/k_1)^{-1}(u+1/k)^{1/2}(u-1)^{1/2}(u-1/k_1)^{-1}(u-1/k)^{1/2}} + C,$$

atau

$$Z = A \int \frac{(u^2 - 1/k_1^2)du}{\sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - 1/k^2)}} + C. \quad (2.47)$$

dengan A tetapan skala sedangkan C adalah tetapan integral. Setelah melakukan penerapan syarat batas, Palmer sampai pada perumusan akhir,

$$\frac{w}{d} = \frac{K(k')E(\beta, k') - E(k')F(\beta, k')}{\pi/2}, \quad (2.48)$$

dengan $\beta = \sin^{-1} \sqrt{\frac{K(k') - E(k')}{(1 - k^2)K(k')}}$, sedangkan $F(\beta, k')$ dan $E(\beta, k')$ berturut-turut

adalah fungsi integral eliptik tak lengkap macam pertama dan macam kedua untuk argumen β dan k' . Merujuk pada Pers.(2.40.b) dan Pers.(2.40.d) maka $K(k') = F(1, k')$ dan $E(k') = E(1, k')$. Namun demikian formula Palmer tersebut masih memerlukan penerapan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan nonlinear satu variabel guna mendapatkan nilai modulus k untuk setiap nilai $\frac{w}{d}$

kapasitor pelat sejajar, sebelum akhirnya dimasukkan ke dalam Pers.(2.46) untuk perhitungan kapasitansi persatuan panjangnya. Penggunaan metode penyelesaian persamaan *nonlinear* dua variabel diperlukan untuk mendapatkan nilai modulus k dan k_0 dari formula Collin berikut untuk setiap pasangan d dan w yang diberikan,

$$d = \frac{\pi/2}{E(\pi/2, k')}, \quad (2.49.a)$$

$$w = \frac{k_0^2}{k^2} E(\theta, k') - F(\theta, k'), \quad (2.49.b)$$

dengan $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{kk_0'}{k'k_0} \right).$

Walaupun hubungan rasio $\frac{w}{d}$ dan modulus k pada formula Palmer dan Collin bentuknya berbeda, namun hasil perhitungan yang ditampilkan dalam publikasi masing-masing menunjukkan hasil yang sebanding. Untuk nilai rasio $\frac{w}{d} = 2$ misalnya, perhitungan kapasitansi persatuan panjang dengan formula Palmer adalah 3.266F, nilai ini sebanding dengan yang diperoleh Collin untuk rasio $\frac{2w}{d} = 4$ yang memberikan nilai kapasitansi persatuan panjang 6.529 F.

2.8 Formula Eksak dan Pendekatan untuk Impedansi Karakteristik *Microstrip*

Struktur geometri *microstrip* yang menjadi sentra dari pengembangan antenna *microstrip lines* ditunjukkan dalam Gambar 2.1, walaupun pada gambar tersebut *strip* digambarkan memiliki ketebalan t , namun dalam perumusan kapasitansinya tebal tersebut diabaikan. Hal ini dimaksudkan agar terpenuhi modus perambatan gelombang TEM. Sebagaimana disebutkan dalam bab pendahuluan, orang pertama yang berhasil memformulasikan kapasitansi persatuan panjang dari *microstrip* secara eksak menggunakan metode *conformal mapping* adalah Schneider (1969). Formula kapasitansi persatuan panjang *microstrip* yang didupatkannya adalah dalam bentuk:

$$C = \varepsilon \frac{K(k')}{K(k)}, \quad (2.50)$$

dengan hubungan nilai modulus k dan parameter geometri rasio lebar strip terhadap tebal dielektrik $\frac{W}{h}$ terformulasi dalam kombinasi fungsi integral eliptik macam pertama $K(k)$ dan macam kedua $E(k)$ memenuhi persamaan implisit berikut:

$$\frac{W}{h} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\pi \frac{K(k')}{K(k)}}}{1 - e^{-2n\pi \frac{K(k')}{K(k)}}} \sin[2n\pi \xi(k)], \quad (2.51)$$

dengan $\xi(k) = \frac{1}{2K(k)} dn^{-1} \left(\sqrt{\frac{E(k)}{K(k)}} \right)$, dan dalam hal ini dn^{-1} adalah invers fungsi Jakobi eliptik macam ketiga. Namun demikian dalam aplikasi praktis formula eksak Schneider tersebut jarang digunakan. Berikut tiga buah formula pendekatan untuk impedansi karakteristik *microstrip* yang populer digunakan dalam pendesainan antenna (Ramesh dkk, 2001) :

1. Formula Schneider

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\epsilon_r}} \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{8h}{W} + \frac{4W}{h} \right), & \frac{W}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{\frac{W}{h} + 2.42 - 0.44 \frac{h}{W} + \left(1 - \frac{W}{h}\right)^6}, & \frac{W}{h} > 1 \end{cases}, \quad (2.52)$$

dengan Z_{F0} : Impdansi ruang bebas.

2. Formula Wheeler :

$$Z_L = Z_{F0} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r}} \frac{\frac{W}{2h} + \frac{1}{\pi} \ln 4 + \frac{\epsilon_r + 1}{2\pi\epsilon_r} \ln \left(\frac{\pi e}{2} \left[\frac{W}{2h} + 0.94 \right] \right) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r^2} \ln \left(\frac{\pi^2 e}{16} \right)}{\frac{1}{\pi\sqrt{2(\epsilon_r + 1)}} \left[\ln \left(\frac{4h}{W} + \sqrt{\left(\frac{4h}{W} \right)^2 + 2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(\ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right) \right]}, & \frac{W}{h} \leq 3.3 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{2(\epsilon_r + 1)}} \left[\ln \left(\frac{4h}{W} + \sqrt{\left(\frac{4h}{W} \right)^2 + 2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(\ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right) \right], & \frac{W}{h} > 3.3 \end{cases} \quad (2.53)$$

3. Formula Hammerstad and Jensen

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(f_u \frac{h}{W} + \sqrt{1 + \left[\frac{2h}{W} \right]^2} \right), \quad (2.54)$$

$$\text{dengan } f_u = 6 + (2\pi - 6)e^{-\left(30.666 \frac{h}{W}\right)^{0.7528}}.$$

2.9 Formula Pendekatan Hilberg Orde Satu untuk Fungsi Integral Eliptik

Hampir semua formula kapasitansi dan impedansi karakteristik kapasitor pelat sejajar dan *microstrip lines* mengandung suku fungsi integral eliptik. Untuk memudahkan perumusannya, fungsi integral eliptik tersebut dinyatakan dalam formula pendekatan tanpa bentuk integral. Hilberg (1969) mempeloporinya dengan memberikan pendekatan fungsi integral eliptik dalam bentuk fungsi logaritmik.

Pendekatan Hilberg orde satu ($N=1$) untuk fungsi integral eliptik $\frac{K(k)}{K(k')}$ adalah dalam bentuk

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=1} = \frac{\pi}{\ln \left(2 \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}} \right)}, \quad 0 \leq \frac{K(k)}{K(k')} \leq 1, \quad 0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.55)$$

dan

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=1} = \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right), \quad 1 \leq \frac{K(k)}{K(k')} < \infty, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1 \quad (2.56)$$

dengan $k' = \sqrt{1-k^2}$. Namun dalam aplikasi perumusan kapasitansi kapasitor dan *microstrip lines*, lazim digunakan fungsi integral eliptik dalam rasio $\frac{K(k')}{K(k)}$, sehingga kedua definisi dalam Pers.(2.55) dan Pers.(2.56) dituliskan menjadi.

$$\left[\frac{K(k')}{K(k)} \right]_{N=1} = \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}} \right), \quad 1 \leq \frac{K(k')}{K(k)} < \infty, \quad 0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.57)$$

dan

$$\left[\frac{K(k')}{K(k)} \right]_{N=1} = \frac{\pi}{\ln \left(2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right)}, \quad 0 \leq \frac{K(k')}{K(k)} \leq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1 \quad (2.58)$$

Formula pendekatan Hilberg orde satu di atas memberikan ketelitian 5 angka di belakang koma terhadap nilai eksaknya. Ekspresi pendekatan Hilberg orde pertama tersebut tepat sama pendekatan orde pertama dari fungsi integral eliptik yang diturunkan menggunakan transformasi Jacobi dengan mengelaborasi sifat fungsi-fungsi *Theta* (Fenton dan Gardiner, 1982).

2.10 Pengenalan Fungsi Identitas Transformasi Joukowski

Sebagaimana dipaparkan dalam bab pendahuluan, bahwa pada penelitian Disertasi ini akan dikembangkan metode *conformal mapping* berbasis logaritmik fungsi identitas transformasi Joukowski. Oleh karena itu paparan awal dalam bab metode penelitian ini adalah pengenalan fungsi identitas transformasi Joukowski yang menjadi sentra dari kajian teoritis Disertasi ini. Bila para pengguna metode *conformal mapping* telah akrab dengan istilah fungsi Joukowski dalam Pers.(2.41) dan inversi fungsi Joukowski sebagaimana pada Pers.(2.43), namun tidak demikian halnya dengan “fungsi identitas transformasi Joukowski” dan “identitas Joukowski” yang akan dipaparkan pada sub bab ini.

Pada kajian awal yang telah penulis dilakukan, didapatkan bahwa kehadiran fungsi identitas transformasi Joukowski pada *conformal mapping* amat penting, terutama dalam menciptakan formula pendekatan untuk fungsi integral eliptik $\frac{K(k')}{K(k)}$. Namun demikian berbeda dari pendekatan Hilberg (1969), pendekatan rasio integral eliptik lengkap macam pertama tersebut diberikan sebagai fungsi modular

baru “ x ”, dengan kata lain tidak menggunakan modulus k yang lazim digunakan dalam *conformal mapping* berbasis transformasi Schawrz-Christoffel.

Ide perumusan fungsi identitas transformasi Joukowski didasarkan pada upaya mendapatkan bentuk umum dari inversi fungsi Joukowski, atau dalam istilah yang sederhana adalah mendapatkan Pers.(2.43) dari Pers.(2.41). Untuk maksud ini penurunan formulanya diawali dengan menuliskan bilangan z riil positif dalam bentuk

$$z = \frac{1}{z} [z^2]. \quad (2.59)$$

Sebagaimana diketahui nilai modulus dalam *conformal mapping* berada dalam kisaran 0 hingga 1. Karena itu untuk membedakan bilangan riil positif $z \leq 1$ dan $z \geq 1$ maka Pers.(2.59) selanjutnya dituliskan dalam bentuk

$$z = \frac{1}{2z} [2z^2]. \quad (2.60)$$

Ke dalam suku pembilang Pers.(2.60) selanjutnya ditambahkan suku parameter kosong (*dummy parameter*) $1 - 1$ yang kemudian dituliskan sebagai

$$z = \frac{1}{2z} [z^2 + 1 + (z^2 - 1)] \quad . \quad (2.61)$$

Hingga langkah ini Pers.(2.61) tetap merupakan identitas z sekalipun dituliskan dalam bentuk

$$z = \frac{1}{2z} \left[z^2 + 1 + \sqrt{(z^2 - 1)^2} \right] \quad . \quad (2.62)$$

Nilai $z \leq 1$ dan $z \geq 1$ hadir setelah ke dalam suku dibawah tanda akar dalam Pers.(2.62) dimunculkan suku $z^2 + 1$ sesuai hubungan

$$(z^2 - 1)^2 = (z^2 + 1)^2 - (2z)^2, \quad (2.63)$$

hasilnya adalah

$$z = \frac{1}{2z} \left[z^2 + 1 \pm \sqrt{(z^2 + 1)^2 - (2z)^2} \right]. \quad (2.64)$$

Pers.(2.64) dapat dibedakan atas

$$z \geq 1 \rightarrow z = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} + \sqrt{\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 4} \right], \quad (2.65)$$

dan

$$z \leq 1 \rightarrow z = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} - \sqrt{\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 4} \right]. \quad (2.66)$$

Namun demikian, mengingat nilai modulus selalu berada dalam rentang $0 < z < 1$, maka eksplorasi terhadap identitas bilangan riil positif tersebut hanya ditekankan untuk rentang $z \leq 1$, yaitu

$$z \leq 1 \rightarrow z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^2 - 1}. \quad (2.67)$$

Tampak bahwa Pers.(2.64) dapat diperoleh secara langsung setelah mensubstitusi fungsi Joukowski $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ke dalam z pada inversi fungsi Joukowski dalam Pers.(2.43). Karena itu Pers.(2.67) merupakan fungsi identitas transformasi Joukowski yang dimaksudkan.

Bentuk lain dari fungsi identitas transformasi Joukowski adalah dalam bentuk

$$z = e^{2x} \left(1 - \sqrt{1 - e^{-4x}} \right), \quad z \leq 1 \quad (2.68)$$

yang diperoleh setelah mengambil nilai logaritmik dari fungsi Joukowski sesuai hubungan

$$x = \ln \sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}, \quad (2.69)$$

yang memberikan konsekuensi

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = e^{2x}. \quad (2.70)$$

Persamaan (2.70) merupakan representasi dari transformasi yang lazim digunakan dalam *conformal mapping*, yaitu transformasi dari fungsi Joukowski ke dalam fungsi eksponensial

Hasil menakjubkan diperoleh jika nilai logaritmik fungsi identitas transformasi Joukowski dalam Pers.(2.68) tersebut dilakukan sesuai hubungan $\ln\left(\frac{z}{2}\right)$, yang ternyata berkait langsung dengan pendekatan Hilberg untuk fungsi

integral eliptik orde satu $\left[\frac{K(k')}{K(k)} \right]_{N=1}$, yaitu

$$\left[\frac{K(k')}{K(k)} \right]_{N=1} = -\frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right), \quad (2.71)$$

atau

$$\left[\frac{K(k')}{K(k)} \right]_{N=1} = \frac{1}{\pi} \left[2x + \ln \left(2 \left(1 + \sqrt{1 - e^{-4x}} \right) \right) \right], \quad (2.72)$$

namun demikian hingga langkah ini hubungan antara kedua modulus k dan x belum diketahui. Hubungan kedua angka modulus tersebut dapat dibangun setelah melingkupkan fakta bahwa untuk $z \leq 1$ selalu berlaku $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \geq 1$, karena itu untuk mengeksplorasi identitas dalam Pers.(2.68) selanjutnya dilibatkan identitas logaritmik

$$\ln v = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right), \quad v \geq 1 \quad (2.73)$$

Dengan menyatakan x dalam Pers.(2.68) sebagai $\ln v$ dalam Pers.(2.73) maka diperoleh

$$x = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{2z}} \left[\frac{(z+1)^2}{\sqrt{z^2+1}} \right] \right) \quad (2.74.a)$$

atau

$$x = \sec h^{-1} \left(4 \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}}{z \left(1 + \frac{1}{z} \right)^2} \right). \quad (2.74.b)$$

Pers.(2.74.b) memberikan hubungan modulus x terhadap k ,

$$x = \sec h^{-1}(k). \quad (2.75)$$

Dari hubungan kesamaan argumen fungsi secant hyperbolic dalam Pers.(2.74b) dan Pers.(2.75) selanjutnya dapat diverifikasi kembali hubungan modulus k dan x tersebut, yaitu,

$$k = 4 \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}}{z \left(1 + \frac{1}{z} \right)^2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}}} = \sec h(x). \quad (2.76)$$

Fungsi integral eliptik dengan modulus baru dalam Pers. (2.72) selanjutnya akan digunakan untuk perumusan kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang akan dipaparkan dalam sub bab 3.3. Pada pembahasan tersebut akan diuji validasi

formula kapasitansi pendekatan Xiang (2006), serta dijadikan dasar dalam merumuskan formula empiris untuk kapasitansi kapasitor pelat sejajar.

Untuk menunjukkan bahwa Pers.(2.71) dan Pers.(2.72) merupakan pernyataan dari fungsi integral eliptik dari pendekatan Hilberg orde satu, dilakukan dengan menerapkan definisi $\lambda = \frac{z}{2}$. Dengan definisi tersebut maka fungsi identitas transformasi Joukowski tereduksi ke dalam bentuk,

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \rightarrow 2\lambda = \left(\lambda + \frac{1/4}{\lambda} \right) - \sqrt{\left(\lambda + \frac{1/4}{\lambda} \right)^2 - 1}, \quad (2.77)$$

yang setelah menerapkan transformasi eksponensial dalam Pers.(2.70), maka Pers.(2.77) bersesuaian dengan bentuk,

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \rightarrow 2\lambda = e^{2x} - \sqrt{e^{4x} - 1}. \quad (2.78)$$

Fungsi identitas transformasi Joukowski dalam Pers.(2.78) selanjutnya ditransformasikan ke dalam bentuk rasional berikut,

$$2\lambda = \frac{1-s}{1+s}, \quad (2.79)$$

sehingga diperoleh ekspresi untuk s dalam bentuk

$$s = \frac{1 - e^{2x} \left(1 - \sqrt{1 - e^{-4x}} \right)}{1 + e^{2x} \left(1 - \sqrt{1 - e^{-4x}} \right)}, \quad (2.80)$$

yang kemudian disederhanakan menjadi

$$s = \sqrt{\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}} = \sqrt{\tanh x} \quad . \quad (2.81)$$

Dari hubungan dalam Pers.(2.75) diketahui bahwa $s = \sqrt{k'}$, sehingga dari Pers.(2.79) diperoleh,

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad (2.82)$$

yang tak lain adalah argumen logaritmik dari fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde satu dalam Pers.(2.55) dan Pers.(2.57).

Selanjutnya diperkenalkan identitas Joukowski yang diturunkan dari hubungan kesamaan fungsi *arctanh hyperbolic* dengan fungsi logaritmik natural,

$$\tanh^{-1} y = \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}, \quad y \neq 0 \quad (2.83)$$

Dari hubungan tersebut selanjutnya diperoleh berikut,

$$2 \tanh^{-1} \left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 = \ln \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right), \lambda \neq 0 \quad (2.84)$$

Untuk $2\lambda = z$, dari Pers.(2.84) tersebut diperoleh hubungan berikut,

$$\tanh^{-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 = \ln \sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \quad (2.85)$$

Setelah mensubstitusikan $y = \frac{1-z}{1+z}$ ke ruas kiri Pers.(2.83), maka Pers.(2.85)

selanjutnya dapat dituliskan ke dalam bentuk,

$$\ln \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}{1 - \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}} = \ln \sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}. \quad (2.86)$$

Dan dari Pers.(2.86) dapat dituliskan kesamaan berikut,

$$\frac{1 + \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}{1 - \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), z \neq 0. \quad (2.87)$$

Pers.(2.87) merupakan identitas Joukowski yang dimaksudkan. Penerapan identitas Joukowski pada penciptaan skema iterasi baru untuk perumusan argumen logaritmik fungsi integral eliptik akan ditampilkan dalam sub bab 3.1.2.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 3

METODE PENELITIAN

Penelitian dalam Disertasi ini dilakukan untuk mengembangkan metode pendesainan antena *microstrip lines* melalui Kajian Teoritis. Kajian ditekankan antara lain untuk menciptakan metode perumusan fungsi integral eliptik yang merupakan perangkat analitik padametode *conformal mapping* dalam memformulasikan impedansi karakteristik *microstrip lines* yang memberikan hasil desain yang akurat. Memperkenalkan dan menerapkan fungsi identitas transformasi Joukowski untuk menciptakan skema iterasi baru pendekatan Hilberg pada perumusan fungsi integral eliptik pendekatan orde tinggi yang akan dimanfaatkan untuk perumusan impedansi karakteristik *microstrip lines*. Lingkup kajian meliputi :

1. Perumusan skema iterasi baru deret integral eliptik macam pertama dan fungsi integral eliptik berkonvergensi cepat untuk perhitungan nilai impedansi karakteristik eksak *microstrip lines*.
2. Penerapan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde tinggi untuk menghadirkan formula eksplisit impedansi karakteristik *microstrip lines* hasil metode *Conformal Mapping*.
3. Penerapan formula pendekatan modulus pada pendesainan *microstrip lines* berstruktur CPW untuk aplikasi antena.

Berikut diskripsi dari kegiatan masing-masing kajian baik yang telah terpublikasi maupun yang sedang dalam proses review pada Jurnal Ilmiah bereputasi Internasional. Beberapa hal dalam kajian tersebut akan didiskusikan lebih lanjut pada BAB 4.

3.1 Skema Iterasi Baru Fungsi Integral Eliptik

Fungsi integral eliptik merupakan fungsi matematika dalam bentuk rasio integral eliptik lengkap macam pertama $\frac{K(k)}{K(k')}$, dengan k dan k' adalah nilai modulus dan komplemen modulusnya. Fungsi integral eliptik ini lazim digunakan dalam formula eksak (*closed form*) kapasitansi dan/atau impedansi karakteristik

microstrip-lines yang perumusannya dilakukan menggunakan metode *conformal mapping* (Kouzaev,2013). Salah satu jenis *microstrip lines* adalah *coplanar waveguide* (CPW), yang tersusun atas sebuah *strip* konduktor pusat dan dua bidang *ground* yang kesemuanya tertumpuk di atas substrat dielektrik membentuk susunan pandu gelombang terkopel (Simons,2001). Pembuatan CPW awalnya didemonstrasikan oleh Wen (1969) pada substrat tunggal. Kemudian devais ini dibuat menggunakan substrat berlapis (Gevorgian dkk,1996; Igreja dan Dias,2004). Kini CPW telah dapat dibuat dalam bentuk *monolithic* (Ghione dan Naldi,1984; Cattaneo,2010). Oleh karena CPW memasok moda propagasi kuasi TEM, devais ini dapat digunakan untuk mengintegrasikan gelombang mikro (*microwave*) dan gelombang milimeter (*millimetrewave*). Devais CPW bahkan populer pula digunakan sebagai devais pasif pada jaringan telekomunikasi nirkabel, mulai dari fungsi sebagai *switches*, *filters*, *varactors*, *phase shifters*, *signal detectors*, dan untuk *feed line* dari perangkat GPR (*ground penetrating radar*).

Dalam pendesainan CPW, parameter geometri CPW terkait langsung dengan fungsi integral eliptik melalui nilai modulusnya k . Namun, karena integral eliptik lengkap macam pertama berbentuk deret takhingga, maka perumusan dan perhitungan besaran *microstrip lines* menjadi demikian rumit. Pendekatan Hilberg (1969) hadir untuk mengatasi kerumitan analitik tersebut, yaitu dengan menghadirkan formula pendekatan untuk fungsi integral eliptik dalam bentuk fungsi logaritmik Natural (selanjutnya disebut fungsi logaritmik). Hilberg memperkenalkan tiga formula pendekatan fungsi integral eliptik yang diperolehnya dengan metode *conformal mapping*, dimana keakuratannya meningkat sesuai dengan peningkatan orde pendekatannya. Meskipun skema iterasi umum Hilberg untuk perumusan pendekatan orde tinggi juga tersedia, namun faktanya hingga kini hanya formula formula dari ketiga orde pendekatan terendah tersebut yang lazim digunakan dalam pendesainan *microstrip lines* dan sistem antena. Pada perancangan CPW misalnya, formula fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde nol digunakan oleh Veyres dan Hanna (1980) ketika mengembangkan CPW dengan ukuran berhingga, dan juga digunakan oleh Boothalingam dan Karantharaj (2012) untuk mendesain penggeser fasa pada frekuensi radio. Formula fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde satu digunakan oleh Wei dkk (2012) dalam

menyatakan model analitik CPW pada substrat SOI (*Silicon on Insulator*) untuk aplikasi rangkaian *microwave*. Sedangkan formula fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde dua digunakan oleh Nayak dkk (2016) ketika mendesain CPW untuk *feed line* of GPR. Serta masih banyak penggunaan dari ketiga formula fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg untuk perancangan *microstrip lines* jenis lainnya (Abdullah dkk, 2012; Kusumawati dkk, 2012; Rahayu dkk, 2014; Kusumawati dkk, 2016), yang tidak disebutkan satu persatu dalam kajian disertasi ini.

Dimotivasi oleh tidak tersedianya formula pendekatan Hilberg orde tinggi untuk fungsi integral eliptik, maka dalam kajian ini dilakukan penyederhanaan terhadap ketiga formula pendekatan Hilberg yang ada. Telah diketahui bahwa pendekatan Hilberg untuk fungsi integral eliptik dibedakan atas rentang nilai modulusnya. Ekspresi fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg untuk kedua rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$ adalah saling berkebalikan. Dalam hal ini ekspresi argumen logaritmiknya sama tetapi hanya berbeda modulus, pada rentang modulus pertama digunakan k' , sedangkan pada rentang modulus kedua digunakan k . Oleh karena fakta ini, maka upaya penyederhanaan difokuskan untuk menciptakan skema baru iterasi Hilberg dengan menghubungkan argumen logaritmik antar dua orde pendekatan Hilberg yang berurutan. Dalam kajian ini diperkenalkan identitas Joukowski untuk menghubungkan argumen logaritmik dari pendekatan fungsi integral eliptik pada masing-masing rentang modulus. Sebagai hasilnya, argumen logaritmik dari pendekatan Hilberg orde satu diperoleh secara eksplisit sebagai fungsi dari argumen logaritmik pendekatan Hilberg orde nol. Fakta ini selanjutnya dijadikan sebagai dasar dari penciptaan algoritma baru untuk menyederhanakan skema iterasi Hilberg bentuk asli (*original form*). Penjelasan rinci dari perumusan identitas Joukowski berikut penerapannya dipaparkan dalam sub bab selanjutnya.

3.1.1 Skema *Original* Iterasi Hilberg untuk Pendekatan Fungsi Integral Eliptik

Merujuk pada paper Hilberg (1969), pendekatan fungsi integral eliptik diklasifikasikan atas rentang nilai modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$, yang masing-masing bersesuaian dengan rentang nilai fungsi integral eliptik $0 \leq \frac{K(k)}{K(k')} \leq 1$ dan $1 \leq \frac{K(k)}{K(k')} < \infty$. Dalam hal ini semua pendekatan Hilberg terekspresi dalam bentuk fungsi logaritmik. Dalam merumuskan argumen logaritmik untuk setiap orde pendekatan $N = 0, 1, 2, \dots, \infty$, Hilberg memberikan dua skema iterasi umum, yakni berturut-turut.

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_N = \frac{2^{N-1} \pi}{\ln \left(2 \sqrt{\frac{1+k_N'}{1-k_N'}} \right)}, \quad 0 \leq \frac{K(k)}{K(k')} \leq 1, \quad 0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.1.1)$$

dan

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_N = \frac{2^{1-N}}{\pi} \ln \left(2 \sqrt{\frac{1+k_{-N}}{1-k_{-N}}} \right), \quad 1 \leq \frac{K(k)}{K(k')} < \infty, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1 \quad (3.1.2)$$

Perumusan argumen logaritmik untuk masing masing orde pendekatan adalah mengacu pada notasi berikut,

$$\begin{aligned} k_N' & \text{ untuk } \nu = 0, 1, 2, \dots, N, \\ k_{-N} & \text{ untuk } \nu = 0, -1, -2, \dots, -(N-1), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

dimana antara satu sama lain memenuhi hubungan komplemen,

$$k_{\nu}^2 + k_{\nu'}^2 = 1. \quad (3.1.4)$$

Iterasi dari perumusan argumen logaritmik untuk rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$,

yaitu $\frac{1+k_N'}{1-k_N'}$ dilakukan dengan mendapatkan k_N' dari Pers.(3.1.4) menggunakan

definisi modulus berikut,

$$k_v = \frac{1-k_{v-1}'}{1+k_{v-1}'}, \quad (3.1.5)$$

Sedangkan iterasi dari perumusan bentuk rasional argumen logaritmik untuk

rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$, yaitu $\frac{1+k_{-N}}{1-k_{-N}}$ dilakukan dengan mendapatkan k_{-N}

juga dari Pers.(3.1.4), tetapi menggunakan definisi modulus komplemen berikut,

$$k_{v-1}' = \frac{1-k_v}{1+k_v}. \quad (3.1.6)$$

Untuk pendekatan orde nol, Hilberg mendefinisikan modulus dan modulus komplemen integral eliptik lengkap macam pertama sebagai,

$$k_0 = k, \quad k_0' = k'. \quad (3.1.7)$$

Sebagai gambaran dari pemakaian skema umum iterasi Hilberg, diberikan contoh

perumusan secara rinci untuk rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dimulai dengan

pendekatan orde nol ($N=0$), bentuk rasional dari argumen logaritmiknya diperoleh

langsung dengan memasukkan $k_0' = k'$ ke dalam Pers.(3.1.7), yaitu,

$$\frac{1+k_0'}{1-k_0'} = \frac{1+k'}{1-k'}. \quad (3.1.8)$$

Sedangkan untuk pendekatan orde tinggi, penurunan bentuk rasional dari argumen

logaritmik diawali dengan mensubstitusikan k_v dari Pers.(3.1.5) ke Pers.(3.1.4),

yang memberikan modulus komplemen dalam bentuk,

$$k_v' = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - k_{v-1}'}{1 + k_{v-1}'} \right)^2}. \quad (3.1.9)$$

Untuk pendekatan orde pertama ($N=1$) memberikan,

$$k_1' = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - k_0'}{1 + k_0'} \right)^2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}, \quad (3.1.10)$$

yang digunakan untuk menyusun bentuk rasional berikut,

$$\frac{1 + k_1'}{1 - k_1'} = \left(\frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right)^2. \quad (3.1.11)$$

Berikutnya, untuk pendekatan Hilberg orde dua berturut-turut diperoleh,

$$k_2' = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - k_1'}{1 + k_1'} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2(1 + k')}\sqrt{k'}}{(1 + \sqrt{k'})^2}. \quad (3.1.12)$$

dan

$$\frac{1 + k_2'}{1 - k_2'} = \left(\frac{\sqrt{1 + k'} + \sqrt[4]{4k'}}{\sqrt{1 + k'} - \sqrt[4]{4k'}} \right)^2. \quad (3.1.13)$$

Ketiga pendekatan Hilberg untuk fungsi integral eliptik diperoleh setelah mensubstitusikan masing-masing bentuk rasional dalam Pers.(3.1.8), Pers.(3.1.11), dan Pers.(3.1.13) ke dalam Pers.(3.1), yaitu

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=0} = \frac{\pi}{2 \ln \left(2 \sqrt{\frac{1 + k'}{1 - k'}} \right)}, \quad (3.1.14)$$

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=1} = \frac{\pi}{\ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right)}, \quad (3.1.15)$$

dan

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=2} = \frac{2\pi}{\ln \left(2 \frac{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'}}{\sqrt{1+k'} - \sqrt[4]{4k'}} \right)}. \quad (3.1.16)$$

Sementara itu perumusan argumen logaritmik untuk rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$ dilakukan dengan mensubstitusikan Pers.(3.1.6) ke dalam Pers.(3.1.4). Dilanjutkan dengan mensubstitusikan hasil $\frac{1+k_{-N}}{1-k_{-N}}$ ke dalam Pers.(3.1.2). Ketiga formula pendekatan Hilberg untuk fungsi integral eliptik tersebut adalah,

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=0} = \frac{2}{\pi} \ln \left(2 \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right), \quad (3.1.17)$$

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=1} = \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right), \quad (3.1.18)$$

dan

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=2} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(2 \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt[4]{4k}} \right). \quad (3.1.19)$$

Sebagaimana tampak dalam Pers.(3.1) dan Pers.(3.2), terdapat fakta menarik bahwa ekspresi formula pendekatan Hilberg antar kedua rentang modulus adalah saling berkebalikan. Hal ini dipertegas oleh persamaan Pers.(3.1.17) hingga Pers.(3.1.19) yang bentuknya berkebalikan dengan persamaan Pers.(3.1.14) hingga Pers.(3.1.16), dalam hal ini hanya k' diganti dengan k . Karena itu, pendekatan fungsi integral eliptik untuk setiap rentang modulus dapat dibangkitkan dalam bentuk umum. Disini, ketiga formula pendekatan Hilberg untuk rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dapat dituliskan dalam bentuk umum berikut (Rohedi dkk, 2017a),

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_N = \frac{\pi}{2^{1-N} \ln \left(\frac{1}{\lambda_N'} \right)}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.20)$$

dimana argumen logaritmik λ_N' untuk $N = 0, 1, 2$ berturut-turut adalah,

$$\lambda_0' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}, \lambda_1' = \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \lambda_2' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k'} - \sqrt[4]{4k'}}{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'}}. \quad (3.1.21)$$

Sementara itu bentuk umum dari formula pendekatan Hilberg untuk rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$ adalah,

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_N = \frac{2^{1-N}}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\lambda_N} \right), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.22)$$

dengan λ_N berturut-turut adalah,

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}, \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}, \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k} - \sqrt[4]{4k}}{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k}}. \quad (3.1.23)$$

Tampak bahwa ketiga ekspresi argumen logaritmik λ_N dalam Pers.(3.1.23) adalah sama dengan ketiga ekspresi λ_N' dalam Pers.(3.1.21), tetapi k' diganti dengan k .

Bentuk formula pendekatan Hilberg orde satu untuk fungsi integral eliptik dalam

Pers.(3.1.18) konsisten dengan $\frac{K(k)}{K(k')} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1}{q} \right)$ yang diperoleh melalui

transformasi Jacobi dengan mengimplementasikan fungsi-fungsi theta (Fenton dan Gardiner, 1982). Dalam hal ini nilai awal untuk q didekati dengan argumen logaritmik λ_1 .

3.1.2. Skema Baru Iterasi Hilberg Menggunakan Identitas Joukowski

Perumusan skema iterasi untuk perumusan argumen logaritmik dari pendekatan Hilberg orde yang lebih tinggi λ_n' dan λ_n secara eksplisit dalam argumen logaritmik pendekatan Hilberg orde yang lebih rendah, pada kajian ini dilakukan dengan menerapkan transformasi yang lasim digunakan dalam metode *conformal mapping*. Dalam hal ini transformasi dari fungsi Mobious yang mewakili bentuk rasional ke dalam fungsi Joukowski (Nehari,1952;Vanderlinde,2004). Transformasi tersebut dilakukan dengan mengimplementasikan identitas Joukowski yang diturunkan dari fungsi Joukowski berikut (Rohedi dkk, 2017a),

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (3.1.24)$$

Setelah mengalikan pembilang dan penyebut ruas kanan Pers.(3.1.24) dengan 2, yaitu,

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{2z^2 + 2}{4z}. \quad (3.1.25)$$

Fungsi Joukowski tersebut dapat ditransformasi ke dalam bentuk rasional setelah menerapkan persamaan berikut,

$$(1+z)^2 \pm (1-z)^2 = \begin{cases} 2z^2 + 2 \\ 4z \end{cases}, \quad (3.1.26)$$

sehingga Pers.(3.1.25) menjadi,

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1 + \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}{1 - \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}. \quad (3.1.27)$$

Persamaan (3.1.27) diperkenalkan sebagai identitas Joukowski yang berlaku untuk semua bilangan kecuali $z = 0$.

Penerapan identitas Joukowski untuk mendekati bentuk rasional argumen logaritmik pendekatan Hilberg λ_N' dalam rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ adalah dimulai dari pendekatan Hilberg orde satu ($N=1$). Langkahnya adalah menghubungkan z dan λ_1' melalui $\left(\frac{1-2\lambda_1'}{1+2\lambda_1'}\right)^2 = k'$ relasi pertama $z = 2\lambda_1'$, kemudian menetapkan relasi λ_1' dan k' berikut. Dari substitusi kedua relasi tersebut ke dalam Pers.(3.1.27) berturut-turut diperoleh ekspresi fungsi Joukowski dan definisi argumen logaritmik dari pendekatan Hilberg orde satu, yaitu

$$\lambda_1' + \frac{1/4}{\lambda_1'} = \frac{1+k'}{1-k'}, \quad (3.1.28)$$

dan

$$\lambda_1' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}. \quad (3.1.29)$$

Tampak bahwa ekspresi λ_1' dalam Pers.(3.1.29) sama seperti definisi awal dalam (3.1.21). Setelah menyatakan ruas kanan Pers.(3.1.28) dalam λ_0' sebagaimana definisinya dalam Pers.(3.1.21), selanjutnya diperoleh relasi iterasi λ_1' terhadap λ_0' dalam bentuk fungsi Joukowski,

$$\lambda_1' + \frac{1/4}{\lambda_1'} = \frac{1}{(2\lambda_0')^2}, \quad (3.1.30)$$

yang bersesuaian dengan persamaan kuadrat berikut,

$$\lambda_1'^2 - \frac{1}{(2\lambda_0')^2} \lambda_1' + \frac{1}{4} = 0. \quad (3.1.31)$$

Dan substitusi $\lambda_0' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}$ ke dalam Pers.(3.1.31) memberikan ekspresi λ_1' sebagaimana dalam Pers.(3.1.21) dan Pers.(3.1.29), yaitu,

$$\lambda_1' = \frac{1}{2(2\lambda_0')^2} \left[1 - \sqrt{1 - (2\lambda_0')^4} \right] = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}. \quad (3.1.32)$$

Untuk meyakinkan bahwa skema iterasi dalam Pers.(3.1.30) berlaku secara umum adalah dengan menuliskan ekspresi λ_2' dalam Pers.(3.1.21) ke dalam fungsi Joukowski berikut,

$$\lambda_2' + \frac{1/4}{\lambda_2'} = \frac{1}{(2\lambda_1')^2}, \quad (3.1.33)$$

yang memberikan

$$\lambda_2' = \frac{1}{2(2\lambda_1')^2} \left[1 - \sqrt{1 - (2\lambda_1')^4} \right] = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k'} - \sqrt[4]{4k'}}{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'}}. \quad (3.1.34)$$

Tampak bahwa penerapan skema iterasi dengan identitas Joukowski juga dapat memverifikasi eksistensi λ_2' sebagaimana pada Pers.(3.1.21). Berdasar fakta ini, jika argumen logaritmik $\lambda_0' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}$ dari pendekatan Hilberg orde nol dijadikan sebagai nilai awal iterasi, maka definisi λ_N' dari pendekatan Hilberg orde yang lebih tinggi $N = 1, 2, 3, \dots$ untuk rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ pada Pers.(3.1.20) dapat dibangun skema iterasi berikut (Rohedi dkk, 2017a),

$$\lambda_N' = \frac{1}{2(2\lambda_{N-1}')^2} \left[1 - \sqrt{1 - (2\lambda_{N-1}')^4} \right], \lambda_0' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}. \quad (3.1.35)$$

Dengan memasukkan λ_2' dalam Pers.(3.1.34) ke dalam Pers.(3.1.35) untuk pendekatan Hilberg orde tiga ($N=3$), akan diperoleh argumen logaritmik λ_3' dalam bentuk,

$$\lambda_3' = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{k'} - \sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}{1 + \sqrt{k'} + \sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}. \quad (3.1.36)$$

Karena itu dengan menggunakan Pers.(3.1.20) maka pendekatan fungsi integral eliptiknya diperoleh dalam bentuk,

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=3} = \frac{4\pi}{\ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k'} + \sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}{1 + \sqrt{k'} - \sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}} \right)}. \quad (3.1.37)$$

Dengan prosedur yang sama, untuk pendekatan Hilberg orde empat ($N=4$) setelah memasukkan λ_3' dari Pers.(3.1.36) ke Pers.(3.1.35), diperoleh argumen logaritmik λ_4' berikut pendekatan fungsi integral eliptiknya berturut-turut dalam bentuk,

$$\lambda_4' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'} - \sqrt{2(1+\sqrt{k'})\sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}}{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'} + \sqrt{2(1+\sqrt{k'})\sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}} \quad (3.1.38)$$

dan

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=4} = \frac{8\pi}{\ln \left(2 \frac{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'} + \sqrt{2(1+\sqrt{k'})\sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}}{\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'} - \sqrt{2(1+\sqrt{k'})\sqrt{2\sqrt{1+k'}^4\sqrt{4k'}}}} \right)}. \quad (3.1.39)$$

Oleh sebab kemiripan ekspresi λ_N' pada Pers.(3.1.21) dengan λ_N pada Pers.(3.1.23), selanjutnya dengan menggantikan λ_N' dengan λ_N maka skema iterasi Hilberg dalam Pers.(3.1.35) dapat digunakan untuk mendapatkan argumen logaritmik λ_N dalam rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$, yaitu,

$$\lambda_N = \frac{1}{2(2\lambda_{N-1})^2} \left[1 - \sqrt{1 - (2\lambda_{N-1})^4} \right], \lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}. \quad (3.1.40)$$

Dimulai untuk Pendekatan Hilberg orde tiga ($N=3$), dengan menggunakan definisi λ_3 yang telah diketahui sebelumnya yaitu $\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k} - \sqrt[4]{4k}}{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k}}$ memberikan argumen logaritmik dalam bentuk,

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{k} - \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k} + \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}, \quad (3.1.41)$$

dan pendekatan Hilberg orde tiga untuk fungsi integral eliptik dalam bentuk,

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=3} = \frac{1}{4\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k} + \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k} - \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}} \right). \quad (3.1.42)$$

Dengan diketahui λ_3 tersebut, maka argumen logaritmik pendekatan Hilberg orde empat λ_4 dan pendekatan fungsi integral eliptiknya berturut-turut didapatkan dalam bentuk,

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k} - \sqrt{2(1+\sqrt{k})\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}}{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k} + \sqrt{2(1+\sqrt{k})\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}}, \quad (3.1.43)$$

and

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{N=4} = \frac{1}{8\pi} \ln \left(2 \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k} + \sqrt{2(1+\sqrt{k})\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}}{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k} - \sqrt{2(1+\sqrt{k})\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}} \right). \quad (3.1.44)$$

Dari beberapa contoh pemakaian skema baru iterasi Hilberg dalam Pers.(3.1.35) dan Pers.(3.1.40), selanjutnya dapat diturunkan secara mudah ekspresi λ_N' dan λ_N

untuk orde tinggi berikut pendekatan fungsi integral eliptiknya untuk kedua rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$.

3.1.3. Perumusan Formula Modulus Fungsi Integral Eliptik Menggunakan Pendekatan Hilberg

Sebagaimana disinggung dalam bab pendahuluan, pada penerapan fungsi integral eliptik dengan pendekatan Hilberg untuk pendesainan *microstrip lines*, terdapat penghubung (*link*) antara parameter geometri dengan nilai modulus beserta komplemen modulus dari integral eliptik lengkap macam pertamanya. Oleh karena itu, setelah mendapatkan ekspresi pendekatan fungsi integral eliptik, selanjutnya ditampilkan cara mendapatkan formula pendekatan untuk nilai modulus k dan komplemen modulus k' dari setiap fungsi integral eliptik $\frac{K(k)}{K(k')}$ yang nilainya telah ditetapkan. Formula pendekatan modulus tersebut selanjutnya diistilahkan dengan formula modulus. Untuk maksud tersebut didefinisikan $\left[\frac{K(k_N)}{K(k'_N)} \right]_N = r$ untuk rentang nilai $0 \leq r \leq \infty$. Langkah perumusan diawali dengan mengubah fungsi logaritmik pendekatan Hilberg ke dalam fungsi *arctangent hyperbolic* melalui hubungan,

$$\tanh^{-1} v = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right). \quad (3.1.45)$$

Dimulai dengan $r \geq 1$ yang bersesuaian dengan rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$. Penerapan Pers.(3.1.45) ke dalam Pers.(3.1.17) hingga Pers.(3.1.19), untuk $N = 0,1,2$ memberikan formula modulus k_N dalam ekspresi yang sederhana, yaitu dalam bentuk (Rohedi dkk,2017a),

$$k_0 = \tanh \left(\frac{\pi}{2} r - \ln 2 \right), \quad (3.1.46)$$

$$k_1 = \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} r - \ln \sqrt{2} \right), \quad (3.1.47)$$

dan

$$k_2 = 2 \coth^4 \left(\pi r - \ln \sqrt{2} \right) - 1 - \sqrt{\left[2 \coth^4 \left(\pi r - \ln \sqrt{2} \right) - 1 \right]^2 - 1}. \quad (3.1.48)$$

Sementara itu perumusan formula modulus untuk pendekatan Hilberg orde tiga dan orde yang lebih tinggi adalah relatif rumit, karena melibatkan polinomial orde tinggi. Untuk pendekatan Hilberg orde tiga ($N=3$), setelah mendefinisikan

$$\left[\frac{K(k_3)}{K(k_3')} \right]_{N=3} = r \text{ ke dalam Pers. (3.1.42),}$$

$$\frac{1}{4\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k} + \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k} - \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}} \right) = r, \quad r \geq 1, \quad (3.1.49)$$

yang memberikan

$$4\pi r - \ln 2 = \ln \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k}}}{1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k}}} \right). \quad (3.1.50)$$

Dan dari substitusi $v = \frac{\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k}}$ ke dalam Pers. (3.1.45) selanjutnya diperoleh,

$$\tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k}} \right) = 2\pi r - \ln \sqrt{2}, \quad (3.1.51)$$

sehingga

$$\tanh^4(2\pi r - \ln \sqrt{2}) = \frac{8(1+k)\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^4}. \quad (3.1.52)$$

Dari Pers.(3.1.52), setelah mendefinisikan hubungan berikut,

$$y = \frac{8(1+x^2)x}{(1+x)^4}, \quad (3.1.53)$$

dengan $y = \tanh^4(2\pi r - \ln \sqrt{2})$ dan $x = \sqrt{k_3}$, diperoleh bahwa nilai x positif dalam Pers.(3.1.53) adalah bersesuaian dengan salah satu akar polinomial orde empat (*quartic*) berikut,

$$x^4 + 4Ax^3 + 6x^2 + 4Ax + 1 = 0, \quad (3.1.54)$$

dalam hal ini

$$A = 1 - \frac{2}{y} = 1 - 2 \coth^4(2\pi r - \ln \sqrt{2}). \quad (3.1.55)$$

Polinomial *quartic* dalam Pers.(3.1.54) tersebut diselesaikan dengan metode melengkapkan pangkat empat, dengan keempat akarnya adalah (Rohedi dkk, 2017a),

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt[4]{A-1} - \sqrt[4]{A+1}}{\sqrt[4]{A-1} + \sqrt[4]{A+1}}, \quad x_2 = \frac{\sqrt[4]{A-1} + \sqrt[4]{A+1}}{\sqrt[4]{A-1} - \sqrt[4]{A+1}}, \\ x_3 &= \frac{\sqrt{A-1} - \sqrt{A+1} + j2\sqrt[4]{A^2-1}}{\sqrt{A-1} + \sqrt{A+1}}, \\ x_4 &= \frac{\sqrt{A-1} - \sqrt{A+1} - j2\sqrt[4]{A^2-1}}{\sqrt{A-1} + \sqrt{A+1}}, \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

dengan $j = \sqrt{-1}$ adalah bilangan imajiner. Untuk kasus $r \geq 1$, oleh karena nilai modulus harus dalam rentang $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k_3 \leq 1$, maka hanya akar x pertama saja yang

memenuhi persyaratan $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Karena itu, formula modulus k_3 untuk kasus ini adalah dalam bentuk,

$$k_3 = \left[\frac{\coth(2\pi r - \ln \sqrt{2}) - \sqrt[4]{\coth^4(2\pi r - \ln \sqrt{2}) - 1}}{\coth(2\pi r - \ln \sqrt{2}) + \sqrt[4]{\coth^4(2\pi r - \ln \sqrt{2}) - 1}} \right]^2, \quad r \geq 1. \quad (3.1.57)$$

Sementara itu untuk kasus $0 \leq r \leq 1$ yang bersesuaian dengan rentang nilai modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan rentang nilai fungsi integral eliptik $0 \leq \frac{K(k)}{K(k')} \leq 1$

tersebut, juga didefinisikan $\left[\frac{K(k_N)}{K(k'_N)} \right]_N = r$ ke dalam Pers.(3.1.14) hingga

Pers.(3.1.16). Setelah mengubah fungsi logaritmik ke dalam *arctangent hyperbolic* menggunakan Pers.(3.1.45), maka komplemen modulus k'_N untuk $N = 0,1,2$ diperoleh dalam bentuk,

$$k'_0 = \tanh\left(\frac{\pi}{2r} - \ln 2\right), \quad (3.1.58)$$

$$k'_1 = \tanh^2\left(\frac{\pi}{2r} - \ln \sqrt{2}\right), \quad (3.1.59)$$

dan

$$k'_2 = 2 \coth^4\left(\frac{\pi}{r} - \ln \sqrt{2}\right) - 1 - \sqrt{\left[2 \coth^4\left(\frac{\pi}{r} - \ln \sqrt{2}\right) - 1\right]^2 - 1}, \quad (3.1.60)$$

sedangkan masing-masing modulusnya diperoleh dari $k_N = \sqrt{1 - k_N'^2}$. Tampak bahwa ketiga formula k'_N dalam Pers.(3.1.58) hingga Pers.(3.1.60) untuk kasus $0 \leq r \leq 1$ mirip dengan ketiga formula k_N dalam Pers(3.1.46) hingga Pers.(3.1.48) untuk kasus $1 \leq r \leq \infty$, tetapi dengan pergantian $k_N \rightarrow k'_N$ dan $r \rightarrow \frac{1}{r}$.

Berdasarkan kemiripan bentuk tersebut, maka komplemen modulus k'_3 untuk

pendekatan Hilberg ode tiga adalah mirip dengan formula modulus k_3 dalam Pers.(3.1.57), yaitu,

$$k_3' = \frac{\left[\coth\left(\frac{2\pi}{r} - \ln \sqrt{2}\right) - \sqrt[4]{\coth^4\left(\frac{2\pi}{r} - \ln \sqrt{2}\right) - 1} \right]^2}{\left[\coth\left(\frac{2\pi}{r} - \ln \sqrt{2}\right) + \sqrt[4]{\coth^4\left(\frac{2\pi}{r} - \ln \sqrt{2}\right) - 1} \right]^2}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.1.61)$$

yang memberikan $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k_3' \leq 1$ dengan nilai modulus dalam rentang $0 \leq k_3 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.1.4 Penurunan Formula Pendekatan Pi

Validasi pertama terhadap hasil skema iterasi baru pendekatan Hilberg dilakukan pada perhitungan nilai pendekatan π atau angka Pi yang diperlukan untuk perhitungan nilai pendekatan fungsi integral eliptik. Penurunan formula pendekatan Pi tersebut didasarkan pada kesamaan nilai kedua integral eliptik macam pertama $K(k)$ dan $K(k')$ pada $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Karena itu, formula Pi dapat diciptakan dari salah satu rentang modulus fungsi eliptik integral. Perumusan pendekatan Pi dalam hal ini dilakukan untuk rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$ dalam Pers.(3.1.17) hingga Pers.(3.1.19), Pers.(3.1.42), dan Pers.(3.1.44) dengan memberi nilai $\frac{K(k=1/\sqrt{2})}{K(k'=1/\sqrt{2})} = 1$ yang memberikan lima formula pendekatan Pi, yaitu

$$\pi_0 = 2 \ln \left(2 \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \right) \Bigg|_{k=\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad (3.1.62a)$$

$$\pi_1 = \ln \left(2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) \Bigg|_{k=\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (3.1.62b)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \ln \left(2 \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt[4]{4k}} \right) \Big|_{k=\frac{1}{\sqrt{2}}} , \quad (3.1.62c)$$

$$\pi_3 = \frac{1}{4} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k} + \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}{1 + \sqrt{k} - \sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}} \right) \Big|_{k=\frac{1}{\sqrt{2}}} , \quad (3.1.62d)$$

$$\pi_4 = \frac{1}{8} \ln \left(2 \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k} + \sqrt{2(1+\sqrt{k})\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}}{\sqrt{1+k} + \sqrt[4]{4k} - \sqrt{2(1+\sqrt{k})\sqrt{2\sqrt{1+k}\sqrt[4]{4k}}}} \right) \Big|_{k=\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (3.1.62e)$$

Untuk mengkonfirmasi capaian jumlah angka penting (jumlah digit benar di belakang koma) dari kelima formula pendekatan Pi tersebut, perhitungan nilai fungsi dan nilai integral eliptik macam pertama masing-masing dilakukan menggunakan perangkat “*evalf*” dan “*EllipticK*” yang tersedia pada *MapleV*. Tampilan *MapleV* untuk 50 angka penting dari nilai eksak Pi adalah 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751, sedangkan jumlah angka penting dari kelima formula pendekatan Pi dalam Pers.(3.1.62) berturut-turut adalah 3, 6, 10, 22, and 43. Nilai rasio capaian jumlah angka penting dari kedua orde pendekatan berurutan di sekitar 2 menunjukkan bahwa formula Pi yang diciptakan dengan skema iterasi baru pendekatan Hilberg tersebut bersesuaian dengan tingkat konvergensi kuadratik, sebagaimana tingkat konvergensi formula pendekatan Pi yang diperoleh Borwein dan Borwein (1987) menggunakan metode *Arithmetic Geometric Mean* (AGM).

3.1.5. Perhitungan Nilai Fungsi Integral Eliptik Pendekatan Hilberg

Pada Tabel 3.1 ditampilkan hasil perhitungan *MapleV* untuk 32 angka penting nilai eksak fungsi integral eliptik.

Tabel 3.1. Tiga Puluh Dua Angka Penting Nilai Eksak Fungsi Integral Eliptik dari Beberapa Nilai Modulus

| k | $\frac{K(k)}{K(k')}$ |
|----------|-------------------------------------|
| 0.1 | 0.426109330230210265066474324496942 |
| 0.5 | 0.781700961348055753475244064338928 |
| 0.9 | 1.378294551956531317627049555767139 |
| 0.999999 | 5.059520234579518450393941331429127 |

Sedangkan capaian jumlah angka penting dari keempat pendekatan pertama Hilberg untuk fungsi integral eliptik ditampilkan dalam Tabel 3.2 berikut,

Tabel 3.2. Jumlah Angka Penting Fungsi Integral Eliptik dari Empat Pendekatan Pertama Hilberg untuk Beberapa Nilai Modulus

| k | $N=0$ | $N=1$ | $N=2$ | $N=3$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| 0.1 | 3 | 5 | 12 | 23 |
| 0.5 | 3 | 6 | 11 | 23 |
| 0.9 | 3 | 6 | 12 | 23 |
| 0.999999 | 2 | 5 | 11 | 22 |

Tampak bahwa jumlah angka penting dari nilai fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg untuk setiap nilai modulus k meningkat sesuai peningkatan orde pendekatannya.

Validasi pendekatan Hilberg selanjutnya dilakukan terhadap perhitungan nilai pendekatan modulus. Pada Tabel 3.3 ditampilkan hasil perhitungan dari empat pendekatan pertama untuk modulus k_N dalam Pers.(3.1.58) hingga Pers.(3.1.61)

yang memenuhi $\frac{K(k_N)}{K(k_N')} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ untuk b bilangan bulat positif, serta membandingkannya dengan hasil perhitungan nilai eksaknya yang dilaporkan oleh Muzaffar dan Williams (2006), serta oleh Borwein dan Borwein (1984).

Tabel 3.3. Komparasi Jumlah Angka penting dari Nilai Pendekatan Modulus untuk Empat Orde Pendekatan Pertama Hilberg

| b | Exact of k | $N=0$ | $N=1$ | $N=2$ | $N=3$ |
|-----|---|-------|-------|-------|-------|
| 1 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 2 | 5 | 11 | 24 |
| 2 | $\sqrt{2}-1$ | 3 | 8 | 15 | 31 |
| 3 | $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$ | 4 | 10 | 19 | 31 |
| 4 | $3-2\sqrt{2}$ | 5 | 11 | 22 | 31 |
| 5 | $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$ | 5 | 13 | 25 | 32 |

Tampak bahwa nilai modulus pendekatan k yang diperoleh dari pendekatan Hilberg orde yang lebih tinggi lebih akurat daripada orde yang lebih rendah. Hal ini diketahui dari capaian jumlah angka pentingnya yang lebih banyak.

3.1.6. Performansi Skema Iterasi Baru Pendekatan Hilberg

Pada sub bab 3.1.2 telah dipaparkan cara pemakaian skema iterasi baru pendekatan Hilberg untuk fungsi eliptik integral dan dibandingkan dengan skema iterasi *original*nya. Implementasi identitas Joukowski dalam skema iterasi baru tersebut mentransformasikan bentuk rasional dari argumen logritmik pendekatan *original* Hilberg ke dalam fungsi Joukowski. Pada skema iterasi baru tersebut, solusi persamaan kuadrat dari fungsi Joukowski dapat merumuskan argumen

logaritmik pendekatan orde yang lebih tinggi secara eksplisit dalam argumen logaritmik pendekatan orde yang lebih rendah. Hal ini berbeda dengan iterasi original pendekatan Hilberg, dimana pada masing-masing orde pendekatan membutuhkan beberapa langkah iterasi. Dalam ha ini, untuk rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ selalu dilakukan iterasi k_N' untuk mendapatkan bentuk baru dari

$\frac{1+k_N'}{1-k_N'}$. Demikian pula selalu dilakukan iterasi k_{-N} untuk mendapatkan bentuk

rasional baru $\frac{1+k_{-N}}{1-k_{-N}}$ argumen fungsi logaritmik untuk rentang modulus

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1.$$

Lebih lanjut, adalah penting untuk menjelaskan alasan mengapa skema iterasi baru pendekatan Hilberg menggunakan identitas Joukowski dapat mengurangi langkah iterasi dalam perolehan argumen logaritmik fungsi integral eliptik. Untuk maksud ini, penjelasan dapat dilakukan melalui pelacakan eksistensi identitas Joukowski dalam Pers.(3.1.27) sebagai argumen logaritmik pendekatan Hilberg tersebut dari identitas logaritmik dalam Pers.(3.1.45) yang dituliskan dalam hubungan berikut,

$$\frac{1+v}{1-v} = e^{2 \tanh^{-1} v}. \quad (3.1.63a)$$

Setelah menyatakan suku ruas kiri Pers.(3.1.63a) dalam suku penjumlahan berikut,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}} + \frac{1+\sqrt{v}}{1-\sqrt{v}} \right) = e^{2 \tanh^{-1} (\sqrt{v})^2}, \quad (3.1.63b)$$

kemudian memperkenalkan perubah perubah baru,

$$z = \frac{1-\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}}, \quad \sqrt{v} = \frac{1-z}{1+z}, \quad (3.1.63c)$$

maka Pers.(3.1.63b) dapat dituliskan dalam bentuk,

$$\ln \sqrt{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \tanh^{-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2. \quad (3.1.63d)$$

Dan setelah menyatakan fungsi arctanh pada ruas kanan Pers.(3.1.63d) ke dalam fungsi logaritmik sebagaimana pada Pers.(3.1.45), maka Pers.(3.1.63d) menjadi,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}{1 - \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2} \quad (3.1.63e)$$

Tampak bahwa identitas Joukowski pada Pers.(3.1.27) hadir dari kesamaan argumen fungsi logaritmik dalam Pers.(3.1.63e). Fakta bahwa fungsi Joukowski datang secara natural dalam argumen logaritmik pendekatan Hilberg inilah yang menjadi alasan keberhasilannya mengurangi langkah iterasi dalam perolehan formula pendekatan fungsi integral eliptik. Keuntungan lainnya dari skema baru iterasi pendekatan Hilberg untuk fungsi integral eliptik tersebut adalah menyediakan formula pendekatan Pi. Dengan metode baru tersebut, angka Pi yang diperlukan pada pendesainan devais CPW dan devais *microstrip lines* lainnya dapat diciptakan sesuai orde pendekatan Hilberg yang digunakan.

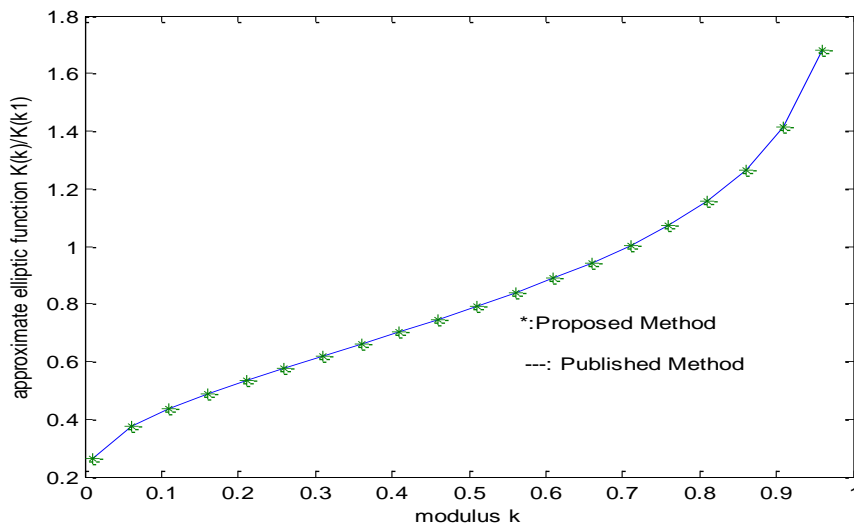
Dalam upaya menyediakan formula modulus pendekatan yang akurat untuk mendesain devais CPW, serta menghindari kerumitan proses aljabar dalam mendapatkan nilai modulus k_N yang memenuhi persamaan $\frac{K(k_N)}{K(k_N')} = r$, maka desain tersebut cukup dilakukan menggunakan formula modulus pendekatan orde tiga. Hal ini merujuk pada capaian akurasi sebagaimana ditunjukkan dalam Tabel 3.4, yang dapat memberikan hasil perhitungan berakurasi presisi ganda.

Sebagai validasi akhir untuk menunjukkan performansi skema iterasi baru pendekatan Hilberg yang diperkenalkan dalam kajian ini, hasil perhitungan fungsi integral eliptik dalam Per.(3.1.42) dikomparasikan terhadap hasil perumusan metode lain menggunakan transformasi Jacobi (Fenton dan Gardiner,1982), yaitu

$$\left[\frac{K(k)}{K'(k)} \right]_{N=4} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13}} \right). \quad (3.1.64)$$

dengan $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt[4]{m}}{1 + \sqrt[4]{m}}$, dan $m = k^2$. Grafik komparasi hasil perhitungan tersebut

ditunjukkan dalam Gambar 3.1 berikut (Rohedi dkk, 2017a),



Gambar 3.1. Komparasi Nilai Fungsi Integral Eliptik Hasil Skema Baru Pendekatan Hilberg Terhadap Hasil Metode Jacobi

Tampak bahwa hasil perhitungan dari metode pendekatan fungsi integral eliptik yang diciptakan dalam kajian ini sesuai dengan yang diperoleh menggunakan transformasi Jacobi (Fenton dan Gardiner, 1982).

3.2. Deret Takhingga Baru untuk Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama Beserta Peningkatan Tingkat Konvergensinya

Integral eliptik lengkap macam pertama berkonvergensi cepat selama ini lazim dihitung menggunakan deret takhingga dari fungsi transformasi Landen. Pada kajian indisertasi ini diusulkan deret takhingga baru untuk integral eliptik lengkap macam pertama yang mampu meningkatkan tingkat konvergensi deret takhingga transformasi Landen. Deret takhingga baru tersebut diperoleh setelah memodifikasi bentuk asli integral eliptik lengkap macam pertama dengan mengubah ekspresi sudut tunggalnya ke sudut ganda. Dari modifikasi sudut tersebut serta menggantikan

modulus deret takhingga baru dengan fungsi modulus deret takhingga fungsi transformasi Landen terbentuklah sebuah fungsi transformasi baru yang mengandung fungsi modulus “sendiri” yang berbeda dari fungsi modulus yang ada sebelumnya. Perbaikan tingkat konvergensi deret takhingga transformasi Landen dilakukan melalui penerapan skema iterasi terhadap fungsi transformasi baru tersebut dengan mengganti modulusnya dengan fungsi modulus sendiri hasil iterasi sebelumnya. Untuk setiap langkah iterasi terbentuk fungsi transformasi baru bentuk lainnya beserta deret takhingganya (Rohedi dkk, 2017b).

Telah diketahui bahwa Integral eliptik lengkap macam pertama $K(k)$ adalah salah satu dari tiga macam integral eliptik yang mendapat banyak perhatian, tidak saja digunakan oleh para ahli matematika tetapi juga oleh para *engineer*. Pada pengembangan sains misalnya, integral eliptik lengkap macam pertama lazim digunakan untuk memecahkan persoalan kisi tiga dimensi (Glasser,1976), menciptakan formula Pi (Salamin,1976) melalui metode *Arithmetic Geometric Mean* (AGM), sebagai dasar untuk memperumum integral eliptik taklengkap macam pertama (Qureshi dan Kaleem,2011) dan pengembangan deret hipergeometri (Boettner dan Victor,2010), dll. Sedangkan dalam bidang aplikasi, integral eliptik lengkap macam pertama digunakan secara luas pada pendesainan devais *electromagnetic* (Calixto dkk,2010), sebagai fungsi dasar dalam metode *conformal mapping* (Nehari,1952; Tobin dan Trefeten,2002), terutama pada pendesainan kapasitor (Chen dkk,2014) dan *microstrip* (Cattaneo,2010; Rameswarudu dan Sridevi, 2016; Himanshu dan Anil,2016) yang banyak dijumpai dalam aplikasi antena dan detektor. Integral eliptik lengkap macam pertama dipakai pula untuk pemodelan aliran udara (Melkunov dkk,2016), serta diterapkan sebagai formula pendekatan pada pengembangan teknologi pemindahan daya secara nirkabel (Kumar dan Jayasingh,2016).

Integral eliptik lengkap macam pertama juga dapat digunakan untuk mendapatkan integral eliptik lengkap macam kedua $E(k)$, mengingat keduanya terkait melalui hubungan persamaan diferensial biasa (Carlson,2009; Borwein dan Borwein,1987). Namun demikian, $K(k)$ dapat dihitung dengan beberapa cara, yaitu dengan menggunakan deret pangkat, deret Fourier, fungsi-fungsi theta, dan

transformasi Landen (Fenton dan Gardiner,1982). Ketiga metode pertama cepat konvergen hanya untuk nilai modulus k yang mendekati 0. Dihak lain meskipun transformasi Landen relatif lebih cepat konvergen, namun tetap menarik untuk dikembangkan terutama guna meningkatkan tingkat konvergensi untuk nilai modulus yang mendekati 1.

Pada kajian disertasi ini upaya memperbaiki tingkat konvergensi integral eliptik lengkap macam pertama $K(k)$ dilakukan dengan mengganti modulus k dengan fungsi modulus sedemikian sehingga diperoleh bentuk baru deret takhingganya. Perubahan bentuk deret takhingga dari bentuk asli ke bentuk baru tersebut diistilahkan dengan fungsi transformasi. Dari kajian pustaka yang dilakukan Carlson (2009) dan Borwein dan Borwein (1987) terdapat dua fungsi transformasi yang telah dikenal sebelumnya, yakni yang melibatkan pergantian modulus dengan fungsi modulus $k \rightarrow \frac{jk}{k'}$ dan $k \rightarrow \frac{1-k'}{1+k'}$ yang berturut-turut melahirkan fungsi transformasi $K(k) = \frac{1}{k'} K\left(\frac{jk}{k'}\right)$ dan $K(k) = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)$, dalam hal ini $j = \sqrt{-1}$ sedangkan $k' = \sqrt{1-k^2}$ adalah modulus komplemen. Fungsi transformasi bentuk kedua terkenal dengan sebutan transformasi Landen. Namun demikian, dipandang perlu untuk mendapatkan fungsi transformasi bentuk lainnya yang menyediakan tingkat konvergensi orde tinggi. Untuk maksud peningkatan konvergensi tersebut dilakukan modifikasi terhadap bentuk asli $K(k)$ sedemikian sehingga diperoleh deret takhingga barunya. Deret takhingga baru tersebut kemudian digunakan sebagai dasar untuk membangun fungsi transformasi baru yang mengandung fungsi modulus sendiri. Dalam kajian ini diperkenalkan istilah fungsi modulus sendiri (*own modulus*) karena bentuknya berbeda dengan fungsi modulus yang telah dikenal sebelumnya. Adapun perbaikan tingkat konvergensi $K(k)$ dilakukan dengan cara yang berbeda dari kajian sebelumnya (Borwein dan Borwein,1987). Pada kajian ini berbagai fungsi transformasi baru diperoleh melalui penerapan skema iterasi dengan menggantikannilai modulus dengan fungsi modulus sendiri pada setiap langkah iterasinya.

3.2.1. Perumusan Deret Takhingga Baru Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama

Perumusan deret takhingga baru untuk $K(k)$ dimaksud tetap didasarkan pada bentuk *original* integral eliptik macam pertama (Carlson, 2009; Borwein dan Borwein, 1987), yaitu

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k \in (0,1). \quad (3.2.1)$$

dengan bentuk deret takhingga,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right]^2 k^{2n}, \quad (3.2.2)$$

atau dalam bentuk ekspansi berikut,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \left(\frac{5}{16}\right)^2 k^6 + \left(\frac{35}{128}\right)^2 k^8 + \dots \right], \quad (3.2.3)$$

adapun tiga buah titik setelah suku terakhir merupakan notasi penjumlahan berlanjut hingga suku tanpa batas. Persamaan (3.2.2) diperoleh setelah mengekspansikan $(1-k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}$ dalam suku $\sin^2 \theta$, kemudian mengintegrasikan suku demi suku dengan *integrand* $d\theta$. Deret takhingga untuk $K(k)$ dalam Pers.(3.2.3) juga bersesuaian dengan bentuk deret takhingga berikut (Salahuddin, 2013),

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n}. \quad (3.2.4)$$

Oleh karena untuk n bilangan cacah (nol dan bulat) berlaku $(2n)!! = 2^n n!$, maka faktorial ganda pada pembilang Pers.(3.2.4) didapatkan dalam bentuk,

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (3.2.5)$$

Langkah perumusan deret takhingga baru untuk $K(k)$ diawali dengan memodifikasi bentuk integral asli dalam Pers.(3.2.1). Modifikasi dilakukan dengan mengubah sudut θ menjadi sudut ganda 2θ dengan merujuk pada hubungan identitas trigonometri berikut,

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta). \quad (3.2.6)$$

Bentuk baru integral eliptik macam pertama tersebut diperoleh dari substitusi Pers.(3.2.6) ke dalam Pers.(3.2.1), yaitu (Rohedi dkk, 2017b),

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\cos 2\theta}{1 - \frac{2}{k^2}}}}. \quad (3.2.7)$$

Dalam hal ini *subscript* N disertakan untuk membedakannya dari bentuk asli integral eliptik macam pertama. Deret takhingga baru tersebut didapatkan dalam bentuk,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(2^{3n} n!)^2 (2n)!} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{k^2}} \right)^{2n}, \quad (3.2.8)$$

yang dapat juga dituliskan sebagai,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2^{2n} n!)^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{k^2}} \right)^{2n}. \quad (3.2.9)$$

Dalam menyatakan Pers.(3.2.8) dan Pers.(3.2.9) di atas, telah digunakan hubungan dalam Pers.(3.2.5) yakni dengan mengganti n dengan $2n$, yaitu,

$$(4n-1)!! = \frac{(4n)!}{2^{2n}(2n)!}. \quad (3.2.10)$$

Bentuk lain dari integral baru eliptik lengkap macam pertama tersebut adalah,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \right)^2 \cos 2\theta}}, \quad (3.2.11)$$

yang deret takhingganya didapatkan dalam bentuk,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2^{3n} n!)^2} \left(\frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \right)^{4n}, \quad (3.2.12)$$

atau dalam bentuk ekspansi,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot 3}{8^2} \left(\frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{128^2} \left(\frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \right)^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{3072^2} \left(\frac{k}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \right)^{12} + \dots \right\}, \quad (3.2.13)$$

Persamaan (3.2.13) dapat disederhanakan menjadi,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}} \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{1}{1-\frac{k^2}{2}} \right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{35}{128} \left(\frac{1}{1-\frac{k^2}{2}} \right)^4 + \frac{5}{16} \cdot \frac{231}{1024} \left(\frac{1}{1-\frac{k^2}{2}} \right)^6 + \dots \right\} \quad (3.2.14)$$

Tampak bahwa Pers.(3.2.14) sama dengan Pers.(3.2.8) dan/atau Pers.(3.2.9).

3.2.2. Perumusan Fungsi Transformasi Baru untuk Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama

Sebelum mendapatkan fungsi transformasi baru untuk $K(k)$ dan/atau $K(k)_N$, adalah perlu untuk menunjukkan bahwa sesungguhnya kedua integral eliptik macam pertama bentuk “asli” dan “baru” tersebut adalah sama. Dalam hal ini $K(k)_N$ harus tereduksi kembali ke bentuk $K(k)$ manakala sudut ganda 2θ diubah ke sudut θ . Kedua integral eliptik tersebut hanya berbeda tingkat konvergensi deret takhingganya. Namun demikian, oleh karena $\cos(2\theta)$ memiliki dua definisi, maka pernyataan kosinus dari sudut 2θ harus dilakukan secara terpisah untuk masing-masing definisi. Diawali dengan memperkenalkan perubah berikut,

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}}, \quad (3.2.15)$$

sedemikian sehingga $K(k)_N$ dalam Pers.(3.2.11) dapat ditulis dalam bentuk,

$$K(k)_N = x \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(kx)^2 \cos 2\theta}}. \quad (3.2.16)$$

Selanjutnya ke dalam Pers.(3.2.16) dilakukan substitusi kosinus dari 2θ sesuai

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta, \quad (3.2.17)$$

yang memberikan bentuk integral berikut,

$$K(k)_N = A \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_{1N}^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.2.18)$$

dalam hal ini

$$A = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(kx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{2}}}} = 1, \quad (3.2.19)$$

dan

$$k_{1N} = \frac{kx}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(kx)^2}} = k. \quad (3.2.20)$$

Dengan nilai-nilai $A = 1$ dan $k_{1N} = k$ tersebut, tampak bahwa Pers.(3.2.18) menjadi verifikasi dari kesamaan bentuk kedua integral eliptik lengkap macam pertama tersebut,

$$K(k)_N = K(k). \quad (3.2.21)$$

Sementara itu pada penerapan definisi kosinus 2θ menurut identitas berikut,

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1, \quad (3.2.22)$$

maka $K(k)_N$ dalam Pers.(3.2.11) menjadi,

$$K(k)_N = B \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_{2N}^2 \cos^2 \theta}}, \quad (3.2.23)$$

dengan,

$$B = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}(kx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{1}{k'}, \quad (3.2.24)$$

dan

$$k_{2N} = \frac{jkx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}(kx)^2}} = \frac{jk}{k'}. \quad (3.2.25)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan kedua nilai B dan k_{2N} di atas maka Pers.(3.2.23) menjadi,

$$K(k)_N = \frac{1}{k'} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{jk}{k'}\right)^2 \cos^2 \theta}}. \quad (3.2.26)$$

Persamaan (3.2.26) mengindikasikan bahwa terdapat bentuk lain dari integral eliptik lengkap macam pertama $K(k)$ selain bentuk asli dalam (3.2.1) yang umum dikenal, yaitu dalam bentuk,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}}. \quad (3.2.27)$$

Dan dari kesamaan Pers.(3.2.26) dan Pers.(3.2.27) diperoleh fungsi transformasi,

$$K(k)_N = \frac{1}{k'} K\left(\frac{jk}{k'}\right). \quad (3.2.28)$$

Selanjutnya dengan memanfaatkan kesamaan dalam Pers.(3.2.21), maka dari Pers.(3.2.28) dapat dibentuk fungsi transformasi,

$$K(k) = \frac{1}{k'} K\left(\frac{jk}{k'}\right). \quad (3.2.29)$$

Sebagai rangkuman langkah verifikasi Pers.(3.2.21) dan Pers.(3.2.27) dari Pers.(3.2.11) adalah sebagai berikut. Penerapan $\cos 2\theta$ dari Pers.(3.2.17) akan memberikan Pers.(3.2.21), sedangkan penerapan $\cos 2\theta$ dari Pers.(3.2.22) menghasilkan fungsi transformasi Pers.(3.2.28). Kesamaan $K(k)_N$ dan $K(k)$ juga menampilkan fungsi transformasi baru dalam Pers.(3.2.29) yaitu,

$$K(k)_N = \frac{1}{k'} K\left(\frac{jk}{k'}\right)_N. \quad (3.2.30)$$

Dengan nalar yang sama dapat disimpulkan bahwa dari fungsi transformasi Landen berikut,

$$K(k) = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right), \quad (3.2.31)$$

dapat dibentuk fungsi transformasi Landen versi baru, yaitu

$$K(k)_N = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N. \quad (3.2.32)$$

Namun demikian, oleh karena bentuk deret takhingga $K(k)$ dan $K(k)_N$ berbeda, maka tingkat konvergensi Pers.(3.2.29) dan Pers.(3.2.31) masing-masing berbeda dari Pers.(3.2.30) dan Pers.(3.2.32).

Upaya meningkatkan konvergensi deret takhingga baru $K(k)_N$ dilakukan dengan mengeksplorasi ruas kanan fungsi transformasi Landen barudalam Pers.(3.2.32) dengan mengarahkan pergantian modulus $k \rightarrow \frac{1-k'}{1+k'}$ ke dalam $K(k)_N$ pada Pers.(3.2.7), hasilnya adalah,

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N = \frac{\sqrt{2}(1+k')}{\sqrt{2(1+k')^2 - (1-k')^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{(1-k')^2 \cos 2\theta}{(1-k')^2 - 2(1+k')^2}}}, \quad (3.2.33)$$

dan setelah menerapkan identitas berikut,

$$(1+k')^2 = 4k' + (1-k')^2, \quad (3.2.34)$$

maka Pers.(3.2.33) menjadi,

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N = \frac{\sqrt{2}(1+k')}{\sqrt{(1+k')^2 + 4k'}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{(1-k')^2 \cos 2\theta}{(1+k')^2 + 4k'}}}. \quad (3.2.35)$$

Selanjutnya, setelah menerapkan kosinus 2θ dalam Pers.(3.2.17), maka Pers.(3.2.35) dapat disederhanakan menjadi,

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 \sin^2 \theta}}. \quad (3.2.36)$$

Dari Pers.(3.2.36) tampak bahwa penerapan kosinus 2θ sebagaimana pada Pers.(3.2.17) hanyalah memberikan kesamaan berikut,

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N = K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right), \quad (3.2.37)$$

Sedangkan penerapan kosinus 2θ dari Pers.(3.2.22) memberikan,

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N = \frac{1+k'}{2\sqrt{k'}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-k}{2j\sqrt{k'}}\right)^2 \cos^2 \theta}}, \quad (3.2.38)$$

Dan dengan menggunakan Pers.(3.2.27) maka Pers.(3.2.38) memberikan definisi berikut,

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)_N = \frac{1+k'}{2\sqrt{k'}} K\left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}\right). \quad (3.2.39)$$

Substitusi Pers.(3.2.39) ke dalam Pers.(3.2.32), memberikan ,

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K\left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}\right). \quad (3.2.40)$$

Sebagai hasil akhir, terbentuklah fungsi transformasi baru berikut (Rohedi dkk, 2017b),

$$K(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K\left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}\right)_N. \quad (3.2.41)$$

3.2.3. Perbaikan Tingkat Konvergensi Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama

Sebagaimana diketahui bahwa konvergensi deret takhingga integral eliptik lengkap macam pertama dalam Pers.(3.2.2) adalah lambat. Dalam kajian disertasi ini, perbaikan tingkat konvergensi dilakukan melalui implementasi skema iterasi terhadap fungsi transformasi baru $K(k)_N$. Fungsi transformasi baru dimaksud tertera pada Pers.(3.2.30) dan Pers.(3.2.41). Diawali dari Pers.(3.2.30), setelah mengerahkan pergantian modulus $k \rightarrow \frac{jk}{k'}$ ke dalam Pers.(3.2.8) untuk membentuk

deret takhingga untuk $K\left(\frac{jk}{k'}\right)_N$, selanjutnya diperoleh,

$$K_1(k)_N = \frac{1}{k' \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{jk}{k'}\right)^2}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(2^{3n} n!)^2 (2n)!} \left(\frac{1}{1 - 2 \left(\frac{k'}{jk}\right)^2} \right)^{2n}, \quad (3.2.42)$$

Substitusi komplemen modulus $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ke dalam Pers.(3.2.42) memberikan ,

$$K_1(k)_N = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - k^2}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(2^{3n} n!)^2 (2n)!} \left(\frac{k^2}{2 - k^2} \right)^{2n}. \quad (3.2.43)$$

Oleh karena Pers.(3.2.43) dapat tereduksi kembali ke dalam Pers.(3.2.8), dapat disimpulkan bahwa penerapan skema iterasi dengan pergantian modulus $k \rightarrow \frac{jk}{k'}$ tidak dapat digunakan untuk memperbaiki tingkat konvergensi integral eliptik

lengkap macam pertama. Oleh karena itu, implementasi skema iterasi selanjutnya difokuskan terhadap Pers.(3.2.41), (Rohedi dkk, 2017b),

$$K_m(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_{m-1} \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right)_N, \quad m=1,2,3,\dots \quad (3.2.44)$$

disini m adalah langkah (*step*) iterasi, sedangkan $K_0(k)_N$ adalah deret takhingga untuk integral eliptik macam pertama dalam Pers.(3.2.8) dan/atau Pers.(3.2.9). Tetapi karena alasan pembatasan bahasan, disini dipilih deret takhingga dalam Pers.(3.2.9), dimana untuk iterasi pertama ($m=1$) ditetapkan sebagai,

$$K_1(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_0 \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right)_N. \quad (3.2.45)$$

Setelah mengerahkan pergantian modulus $k \rightarrow \frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}$ ke dalam Pers.(3.2.9),

diperoleh deret takhingga untuk $K_1(k)_N$ dalam bentuk,

$$K_1(k)_N = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1+k'^2+6k'}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2^{2n}n!)^2} \left(\frac{(\sqrt{1-k'})^2}{\sqrt{1+k'^2+6k'}} \right)^{4n}. \quad (3.2.46)$$

Berikutnya untuk iterasi kedua ($m=2$) adalah dalam bentuk,

$$K_2(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_1 \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right)_N. \quad (3.2.47)$$

Namun, sebelum menerapkan pergantian modulus $k \rightarrow \frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}$ ke dalam $K_1(k)_N$

dalam Pers.(3.2.46), terlebih dahulu harus dilakukan substitusi komplemen modulus $k' = \sqrt{1-k^2}$ sehingga Pers.(3.2.47) membentuk deret takhingga berikut,

$$K_2(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2-k^2+6\sqrt{1-k^2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2^{2n}n!)^2} \left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2-k^2+6\sqrt{1-k^2}}} \right)^{4n}. \quad (3.2.48)$$

Dan setelah melakukan pergantian modulus $k \rightarrow \frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}$ ke dalam Pers.(3.2.48)

diperoleh,

$$K_2(k)_N = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2^{2n}n!)^2} \left(\frac{(1-\sqrt{k'})^2}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}}} \right)^{4n}. \quad (3.2.49)$$

Dengan prosedur iterasi dan pergantian modulus sebagaimana pada dua iterasi sebelumnya, selanjutnya untuk iterasi ketiga ($m = 3$),

$$K_3(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_2 \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right)_N, \quad (3.2.50)$$

diperoleh,

$$K_3(k)_N = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}}} \left(\frac{(1-\sqrt{k'})^2}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}}} \right)^{4n} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(2^{2n}n!)^2} \left(\frac{(\sqrt{1+k'}-\sqrt[4]{4k'})^2}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}}} \right)^{4n} \quad (3.2.51)$$

Adapun untuk iterasi ke empat ($m = 4$),

$$K_4(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_3 \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right)_N, \quad (3.2.52)$$

diperoleh deret takhingga berikut,

$$K_4(k)_N = \frac{8\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}+6(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}+12(\sqrt{1+k'}+\sqrt[4]{4k'})^2(1+\sqrt{k'})\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}}} \quad (3.2.53)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!}{(2^{2n}n!)^2} \left(\frac{(1+\sqrt{k'}-\sqrt[4]{4(1+k')\sqrt{4k'}})^2}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}+6(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}+12(\sqrt{1+k'}+\sqrt[4]{4k'})^2(1+\sqrt{k'})\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}}} \right)^{4n}$$

Dan setelah melakukan proses penyederhanaan aljabar, keempat formula deret takhingga baru untuk $K_m(k)_N$ di atas selanjutnya dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi transformasi masing-masing, yaitu (Rohedi dkk, 2017b),

$$K_1(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K(k_1)_N, \quad k_1 = \frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \quad (3.2.54)$$

$$K_2(k)_N = \frac{2K(k_2)_N}{\sqrt{(1+k')\sqrt{4k'}}}, \quad k_2 = \frac{(1-\sqrt{k'})^2}{2j\sqrt{(1+k')\sqrt{4k'}}} \quad (3.2.55)$$

$$K_3(k)_N = \frac{4K(k_3)_N}{(1+\sqrt{k'})\sqrt[4]{4(1+k')\sqrt{4k'}}}, \quad k_3 = \frac{(\sqrt{1+k'}-\sqrt[4]{4k'})^2}{2j(1+\sqrt{k'})\sqrt[4]{4(1+k')\sqrt{4k'}}} \quad (3.2.56)$$

dan

$$K_4(k)_N = \frac{8K(k_4)_N}{(\sqrt{1+k'}+\sqrt[4]{4k'})\sqrt{2(1+\sqrt{k'})\sqrt[4]{4(1+k')\sqrt{4k'}}}},$$

$$k_4 = \frac{(1+\sqrt{k'}-\sqrt[4]{4(1+k')\sqrt{4k'}})^2}{2j(\sqrt{1+k'}+\sqrt[4]{4k'})\sqrt{2(1+\sqrt{k'})\sqrt[4]{4(1+k')\sqrt{4k'}}}}. \quad (3.2.57)$$

dengan k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 adalah fungsi modulus dari masing-masing integral elliptik lengkap macam pertama berturut-turut mulai dari iterasi pertama hingga keempat.

3.2.4. Tingkat Konvergensi Deret Takhingga Baru Integral Eliptik Macam Pertama

Diskusi tentang perbaikan tingkat konvergensi integral eliptik macam pertama, difokuskan untuk menganalisis capaian jumlah angka penting (*significant figures*) hasil perhitungan nilai numerik dari deret takhingga $K(k)$ yang telah dirumuskan. Semua perhitungan jumlah angka penting pada kajian disertasi ini dilakukan menggunakan fasilitas integral, penjumlahan (*summation*), dan fasilitas perhitungan nilai fungsi, yang tersedia pada perangkat lunak *MapleV*. Pada Tabel 3.4 ditampilkan hasil perhitungan angka penting deret takhingga $K(k)$ *original* (versi asli) pada Pers.(3.2.2) untuk jumlah suku kelipatan sepuluh.

Tabel 3.4. Angka Penting Deret Takhingga $K(k)$ *Original*

| ℓ | $k = 1/10$ | $k = 9/10$ |
|--------|----------------|----------------|
| 0 | 1.570796326... | 1.570796326... |
| 10 | 1.574745562... | 2.262667579... |
| 20 | 1.574745562... | 2.279280028... |
| 30 | 1.574745562... | 2.280439683... |
| 40 | 1.574745562... | 2.280538812... |

Dalam hal ini, notasi ℓ menyatakan suku tertinggi dari setiap deret takhingga. Setelah membandingkan jumlah angka penting dari deret takhingga bentuk asli integral eliptik dalam Tabel 3.4 terhadap hasil perhitungan *MapleV* untuk nilai numerik integral eliptik eksak dalam Pers.(3.2.1), yakni $K(1/10) = 1.57474556\ 1517356 \dots$ dan $K(9/10) = 2.28054913\ 8422770 \dots$, didapatkan bahwa untuk jumlah suku kelipatan sepuluh, capaian jumlah angka penting dari nilai modulus $k = 9/10$ adalah terlalu sedikit bila dibandingkan dengan capaian nilai modulus $k = 1/10$. Data dalam Tabel 3.4 tersebut telah memverifikasi pernyataan Fenton dan gardiner (1982) bahwa konvergensi deret pangkat modulus dari integral eliptik macam pertama untuk nilai modulus k mendekati satu adalah amat lambat. Lebih lanjut, untuk memverifikasi pernyataan bahwa sesungguhnya

nilai numerik dari integral eliptik *original* dalam Pers.(3.2.1) dan versi terbarunya dalam Pers.(3.2.7) dan Pers.(3.2.11) adalah sama, ditunjukkan dalam Tabel 3.5.

Tabel 3.5. Nilai Eksak Integral Eliptik *Original* dan Versi Terbaru

| k | $K(k)$ | $K(k)_N$ |
|--------------|----------------------|----------------------|
| 1/10 | 1.574745561517356... | 1.574745561517356... |
| 1/2 | 1.685750354812596... | 1.685750354812596... |
| $1/\sqrt{2}$ | 1.854074677301372... | 1.854074677301372... |
| 9/10 | 2.280549138422770... | 2.280549138422770... |

Pada semua hasil perhitungan dalam Tabel 3.5 dipotong (*truncated*) hanya sampai 16 angka penting saja. Namun sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 3.6 berikut,

Tabel 3.6. Suku Tertinggi ℓ dari Deret Takhingga $K(k)$ dan $K(k)_N$ untuk Mencapai 16 Angka Penting

| k | $K(k)$ | $K(k)_N$ |
|--------------|--------|----------|
| 1/10 | 6 | 4 |
| 1/2 | 24 | 8 |
| $1/\sqrt{2}$ | 45 | 14 |
| 9/10 | 150 | 41 |

Tampak bahwa capaian jumlah angka penting deret takhingga $K(k)$ dan $K(k)_N$ tetaplah berbeda. Meskipun untuk mencapai 16 angka penting tetap diperlukan banyak suku deret, namun untuk semua modulus k guna mencapai jumlah angka penting yang sama tampak bahwa jumlah suku deret yang diperlukan $K(k)_N$ lebih sedikit daripada $K(k)$. Fakta ini menjadi jaminan bahwa deret takhingga integral eliptik sempurna macam pertama versi baru tersebut lebih cepat konvergen daripada deret takhingga integral eliptik versi *originalnya*.

Lebih lanjut, dari hasil iterasi deret takhingga fungsi transformasi baru dapat dibentuk formula pendekatan integral eliptik dengan menetapkan suku tertingginya sebagai $\ell=0$ pada semua hasil perumusan dalam Pers..(3.2.46), Pers.(3.2.49), Pers.(3.2.51), dan Pers.(3.2.53), yaitu (Rohedi dkk,2017),

$$K_{1,0}(k)_N = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{1+k'^2+6k'}}, \quad (3.2.58)$$

$$K_{2,0}(k)_N = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}}}, \quad (3.2.59)$$

$$K_{3,0}(k)_N = \frac{4\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}+6(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}}}, \quad (3.2.60)$$

dan

$$K_{4,0}(k)_N = \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{1+k'^2+6k'+6(1+k')\sqrt{4k'}+6(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}+12(\sqrt{1+k'}+\sqrt{4k'})^2(1+\sqrt{k'})\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}}}}. \quad (3.2.61)$$

Formula formula deret takhingga suku ke nol tersebut dibandingkan dengan formula-formula deret takhingga suku ke nol hasil penerapan skema iterasi dalam Pers.(3.2.44) tetapi dengan mengganti $K_{m-1}\left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}\right)_N$ dengan $K_{m-1}\left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}}\right)$, dalam hal ini $K_m(k)$ adalah deret takhingga *original* integral eliptik macam pertama dalam Pers.(3.2.2). Hasil formula deret takhingga tersebut adalah,

$$K_{1,0}(k) = \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}, \quad (3.2.62)$$

$$K_{2,0}(k) = \frac{\pi}{\sqrt{(1+k')\sqrt{4k'}}}, \quad (3.2.63)$$

$$K_{3,0}(k) = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{k'}) \sqrt[4]{4(1 + k')\sqrt{4k'}}}, \quad (3.2.64)$$

dan

$$K_{4,0}(k) = \frac{4\pi}{(\sqrt{1+k'} + \sqrt[4]{4k'}) \sqrt[4]{2(1 + \sqrt{k'}) \sqrt{4(1 + k')\sqrt{4k'}}}}. \quad (3.2.65)$$

Komparasi terhadap capaian tingkat konvergensi dari deret takhingga hasil penerapan skema iterasi baru tersebut didiskusikan dalam sub bab 4.2.

3.3. Formula Empiris Baru untuk Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar

Pada sub bab ini dikenalkan pendekatan baru untuk menciptakan formula empiris kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang melibatkan pengaruh *fringing field*. Pendekatan baru tersebut didasarkan pada upaya meningkatkan akurasi formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang ditemukan Love sedemikian sehingga mendekati nilai eksak kapasitansi versi Palmer. Pada metode pendekatan ini, modifikasi formula kapasitansi Love dilakukan dengan memisahkan suku kapasitansi atas suku medan listrik utama yakni garis-garis medan yang tegak lurus antar pelat dan suku *fringing field* atau luberan garis-garis medan listrik keluar dari daerah pelat. Formula kapasitansi Love tersebut dinyatakan dalam fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde nol, dimana suku *fringing-field*nya diperumum untuk membentuk formula empiris yang mengandung dua tetapan riil sembarang. Nilai kedua tetapan sembarang dimaksud ditentukan melalui regresi linier terhadap data kapasitansi eksak formula Palmer. Dalam formula kapasitansi empiris ini, rasio lebar dan jarak pisah antar pelat terformulasi secara eksplisit, sehingga perhitungannya menjadi lebih mudah alih alih daripada perhitungan formula eksak Palmer. Hasil perhitungan formula empiris kapasitansi kapasitor pelat sejajar tersebut diharapkan jauh lebih akurat dibandingkan dengan formula-formula pendekatan kapasitansi yang ada (Rohedi dkk, 2017c).

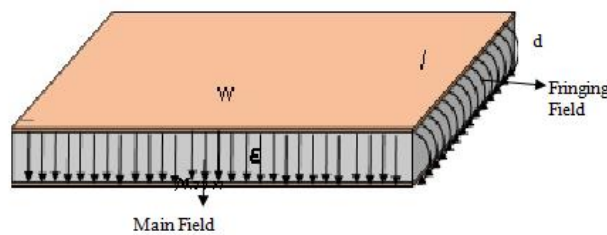
Perburuan terhadap formula akurat kapasitansi kapasitor pelat sejajar dalam bentuk eksplisit sebagai fungsi dari parameter geometri rasio lebar dan jarak pisah

antar pelatnya tetap menjadi kajian yang menarik. Hal ini terkait dengan kebutuhan pemakaiannya dalam berbagai aplikasi kapasitor, misalnya untuk perancangan antena *microstrip* (Verma dkk,2009; Pradyot dan Reena,2010) dan *micro electro mechanical systems* (MEMS) (Kabilan dkk,2009; Chakraborty dkk,2010). Oleh karena alasan rendahnya akurasi formula kapasitansi yang ada, yakni formula kapasitansi Gauss yang hanya berbanding lurus terhadap rasio luasan dan jarak pisah antar kedua pelat, maka perlu dilakukan koreksi dalam implementasinya (Batra dkk,2007; Hosseini dkk,2007). Adapun formula kapasitansi eksak versi Palmer yang mencakup keberadaan *fringing field*(Palmer,1937), meskipun bentuk formulanya berbanding lurus dengan fungsi integral eliptik, namun pemakaiannya amat rumit. Hal ini disebabkan kebergantungan modulus integral eliptik lengkap macam pertamanya terhadap rasio lebar dan jarak pisah pelat terformulasi dalam bentuk persamaan implisit yang rumit. Sebenarnya jauh sebelum ditemukannya formula eksak kapasitansi kapasitor pelat sejajar oleh Palmer yang diperolehnya dengan metode *conformal mapping*, telah ada formula kapasitansi pendekatan dalam bentuk fungsi logaritmik yang ditemukan oleh Love menggunakan metode listrik statis (Love, 1923; Albayrak,2001). Dan faktanya pemakaian pendekatan Love ini amat populer dalam berbagai aplikasi yang melibatkan pemakaian kapasitor pelat sejajar. Adapun formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar terkini adalah formula yang dipublikasikan oleh Xiang(2006). Xiang mendapatkan formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar tersebut sebagai keadaan khusus dari kapasitor pelat tak sejajar yang diturunkannya menggunakan metode *conformal mapping*. Meskipun formula Xiang juga dalam bentuk fungsi integral eliptik, namun ekspresi modulusnya berbanding lurus dengan rasio lebar dan jarak pisah antar kedua pelat kapasitor. Xiang memanfaatkan pendekatan Hilberg orde satu untuk fungsi integral eliptik, sehingga formula kapasitansi integral eliptiknya tereduksi ke dalam bentuk fungsi logaritmik sebagaimana formula kapasitansi Love.

Pada kajian awal, telah dilakukan perhitungan terhadap ketiga formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang telah dipaparkan di atas, yakni formula kapasitansi Palmer, Love, dan Xiang. Dari perbandingan hasil perhitungan ketiga

formula kapasitansi tersebut terdapat fakta menarik terutama perbedaan yang mencolok antara hasil formula Xiang and Palmer, meskipun kedua formula kapasitansi tersebut sama-sama diturunkan menggunakan metode *conformal mapping*. Di pihak lain, hasil perhitungan formula kapasitansi Love lebih mendekati hasil formula kapasitansi Palmer. Diperoleh pula bahwa kontribusi suku *fringing field* dari formula Xiang mendekati konstan terhadap peningkatan rasio lebar dan jarak antar pelat kapasitor. Fakta kekonstanan dan ketidak-akuratan formula kapasitansi Xiang tersebut dijadikan alasan perlunya menciptakan formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar secara empiris. Pada kajian ini formula kapasitansi empiris tersebut dibangun dengan memodifikasi formula Love sedemikian mengandung formula Xiang.

Sebagaimana diketahui, struktur geometri kapasitor pelat sejajar adalah seperti tampak pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Struktur Geometri Kapasitor Pelat Sejajar Beserta Garis-garis Medannya

Perumusan kapasitansi kapasitor pelat sejajar lazim dilakukan menggunakan model listrik statis untuk kapasitor panjang. Sehingga hukum Gauss yang biasa digunakan dalam perumusan kapasitansi tersebut hanya mencakup medan listrik yang tegak lurus terhadap kedua pelat. Karena itu formula kapasitansi yang dihasilkannya adalah dalam bentuk kapasitansi persatuan panjang, yaitu

$$C|_{Gauss} = \epsilon \frac{W\ell}{d}, \quad (3.3.1)$$

dengan W dan ℓ berturut-turut adalah lebar dan panjang pelat, sedangkan d dan ϵ masing-masing adalah jarak pisah antar pelat dan permitivitas bahan pengisi di

daerah kedua pelat. Formula kapasitansi versi Gauss ini diakui tidak akurat ketika jarak pisah antar pelat sebanding dengan luasan geometri pelat (Hosseini dkk,2007). Dipihak lain setelah melingkupkan pengaruh *fringing field*, Palmer (1937) menemukan formula eksak kapasitansi persatuan panjang untuk kapasitor sangat panjang dalam bentuk fungsi integral eliptik $\frac{K(k')}{K(k)}$, yaitu,

$$\frac{C}{\ell} \Big|_{Palmer} = \varepsilon \frac{K(k')}{K(k)}, \quad (3.3.2)$$

dimana kedua modulus k dan komplemen modulus $k' = \sqrt{1 - k^2}$ dari integral eliptik lengkap macam pertama $K(k)$ dan $K(k')$ adalah terkait dengan lebar dan jarak pisah antar pelat melalui hubungan implisit berikut,

$$\frac{w}{d} = \frac{2}{\pi} [K' E(\beta, k') - E' F(\beta, k')], \quad (3.3.3)$$

dengan

$$\beta = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{K' - E'}{(1 - k^2) K'}} \right), \quad (3.3.4)$$

dalam hal ini $K = F(\pi/2, k)$, $K' = F(\pi/2, k')$, dan $E' = E(\pi/2, k')$ memenuhi definisi umum dari integral eliptik macam pertama,

$$F(\beta, k) = \int_0^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.3.5)$$

dan definisi umum dari integral eliptik macam kedua,

$$E(\beta, k) = \int_0^\beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (3.3.6)$$

Formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang juga dalam bentuk fungsi integral eliptik adalah formula kapasitansi Xiang, yaitu

$$\left. \frac{C}{\ell} \right|_{Xiang} = \varepsilon \frac{K(k')}{K(k)}, \quad (3.3.7)$$

akan tetapi komplemen modulusnya k' adalah dalam bentuk eksplisit sebagai fungsi dari rasio lebar dan jarak pisah antar pelat kapasitor, yaitu

$$k' = \tanh\left(\frac{\pi w}{2d}\right). \quad (3.3.8)$$

Untuk nilai komplemen modulus dalam rentang $0 \leq k' \leq 1$, Xiang mendekati fungsi integral eliptik tersebut ke dalam bentuk fungsi logaritmik dengan menggunakan pendekatan Hilberg orde satu,

$$\left[\frac{K(k')}{K(k)} \right]_{N=1} = \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right). \quad (3.3.9)$$

Karena itu setelah melakukan serangkaian proses aljabar Xiang menuliskan Pers.(3.3.7) dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\varepsilon \ell} \right|_{Xiang} = \frac{w}{d} + \frac{1}{\pi} \ln 2 \left(1 + \sqrt{1 - e^{-2\frac{\pi w}{d}}} \right). \quad (3.3.10)$$

Sebagaimana diketahui, suku pertama ruas kanan Pers.(3.3.10) adalah bentuk kapasitansi kapasitor pelat sejajar yang tidak memperhitungkan *fringing field*, sedangkan suku kedua merupakan kontribusi *fringing field*. Namun demikian, pemisahan kapasitansi atas suku tanpa *fringing field* dan dengan *fringing field* tersebut bukanlah yang pertama kali dirumuskan oleh Xiang, karena sebelumnya pemisahan atas kedua suku medan tersebut juga tampak pada formula Love, yaitu

$$\left. \frac{C}{\varepsilon \ell} \right|_{Love} = \frac{w}{d} + \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \left(2\pi \frac{w}{d} \right) \right), \quad (3.3.11)$$

Validasi dari formula kapasitansi Xiang pada dasarnya dapat diketahui setelah menggabungkan kedua suku Pers.(3.3.10) secara kesatuan dalam bentuk berikut,

$$\left. \frac{C}{\mathcal{E}\ell} \right|_{Xiang} = \frac{1}{\pi} \ln 2 \left(e^{\frac{\pi w}{d}} + \sqrt{e^{2\frac{\pi w}{d}} - 1} \right). \quad (3.3.12)$$

Oleh karena nilai of $e^{2\frac{\pi w}{d}} \gg 1$, maka Pers.(3.3.12) dapat didekati ke dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\mathcal{E}\ell} \right|_{Xiang} \approx \frac{1}{\pi} \ln \left(4e^{\frac{\pi w}{d}} \right), \quad (3.3.13)$$

yang selanjutnya dapat dipisahkan atas suku-suku (Rohedi dkk, 2017c)

$$\left. \frac{C}{\mathcal{E}\ell} \right|_{Xiang} \approx \frac{w}{d} + \frac{1}{\pi} \ln 4. \quad (3.3.14)$$

Tampak bahwa kontribusi suku *fringing field* dalam formula kapasitansi Xiang selalu mendekati tetap dengan bertambahnya nilai $\frac{w}{d}$, yaitu di sekitar nilai $\frac{1}{\pi} \ln 4$.

Kekonstanan kontribusi suku *fringing field* ini dipandang sebagai penyebab utama dari ketidakakuratan formula kapasitansi Xiang. Pada kajian ini, peningkatan akurasi formula kapasitansi Xiang didasarkan pada kemiripan bentuk fungsi logaritmiknya dengan formula kapasitansi Love, sehingga tercipta formula empiris baru selain model kurva pangkat dari rasio lebar dan jarak pisah pelat yang selama ini lazim digunakan dalam formula kapasitansi empiris. Salah satu formula kapasitansi empiris model kurva pangkat tersebut adalah formula kapasitansi Mejis-Fokkema (Batra dkk,2007).

Upaya untuk menciptakan formula kapasitansi empiris yang didasarkan pada modifikasi formula Love sedemikian sehingga mengandung suku *fringing-field* Xiang dalam Pers.(3.3.14) dimulai dengan menuliskan Pers.(3.3.11) dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\varepsilon \ell} \right|_{Love} = \frac{w}{d} + \frac{\ln 4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left(2 \sqrt{\frac{\pi e w}{8 d}} \right). \quad (3.3.15)$$

Selanjutnya suku *fringing-field* dalam suku ketiga (3.3.15) dalam bentuk fungsi integral eliptik dengan pendekatan Hilberg orde nol. Mengingat nilai $\frac{\pi e w}{8 d} \gg 1$, maka Pers.(3.3.15) dapat didakati ke dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\varepsilon \ell} \right|_{Love} \approx \frac{w}{d} + \frac{\ln 4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\sqrt{\frac{\pi e w}{8 d}} + \sqrt{\frac{\pi e w}{8 d} - 1} \right), \quad (3.3.16)$$

yang kemudian dinyatakan dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\varepsilon \ell} \right|_{Love} \approx \frac{w}{d} + \frac{\ln 4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{\pi e w}{8 d} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\pi e w}{8 d} \gg 1. \quad (3.3.17)$$

yakni setelah digunakan ekspresi fungsi logaritmik natural dalam fungsi *arccos hyperbolic* sesuai definisi $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Dalam menciptakan formula kapasitansi empiris untuk kapasitor pelat sejajar yang berlaku untuk nilai $\frac{w}{d} \geq 1$, selanjutnya Pers.(3.3.17) diperumum ke dalam bentuk (Rohedi dkk, 2017c),

$$\left. \frac{C}{\varepsilon \ell} \right|_{PresentWork} = \frac{w}{d} + \frac{\ln 4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cosh^{-1} \left(a \frac{w}{d} \right)^b, \quad (3.3.18)$$

dimana kedua tetapan a dan b akan ditentukan melalui proses regresi. Jika proses regresi terhadap formula empiris umumnya dilakukan menggunakan data $\frac{C}{\varepsilon \ell}$ hasil pengukuran, tetapi dalam kajian ini digunakan data hasil perhitungan nilai kapasitansi eksak dari formula Palmer. Proses linierisasi Pers.(3.3.18) dilakukan dengan mengenalkan masing-masing pasangan data absis dan ordinat (x_d, y_d) sebagai berikut,

$$x_d = \ln\left(\frac{w}{d}\right), \quad (3.3.19)$$

$$y_d = \ln \cosh\left(\frac{\pi}{2} \left[\frac{C}{\varepsilon \ell} \Big|_{Palmer} - \frac{w}{d} - \frac{\ln 4}{\pi} \right] \right), \quad (3.3.20)$$

yang selanjutnya dipaskan dengan model persamaan linier,

$$y_d = bx_d + \ln(a^b) \quad (3.3.21)$$

Akurasi formula kapasitansi empiris dikomparasikan terhadap model kurva pangkat dari $\frac{w}{d}$ formula kapasitansi Mejis-Fokkema berikut,

$$\frac{C}{\varepsilon \ell} \Big|_{Mejis-Fokkema} = \frac{w}{d} + 1.06 \left(\frac{w}{d} \right)^{1/4}. \quad (3.3.22)$$

Komparasi berikut analisis pembahasannya akan diberikan dalam sub bab 4.3.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

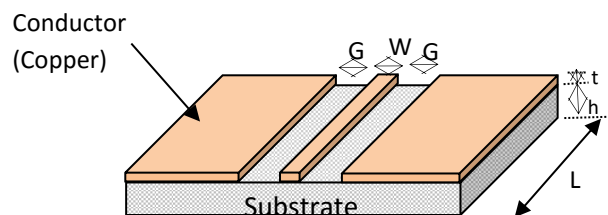
BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Desain *Microstrip Lines* Struktur CPW Menggunakan Formula Modulus Fungsi Integral Eliptik Pendekatan Hilberg

Pada sub bab ini dibahas pemakaian fungsi integral eliptik hasil perumusan skema iterasi baru pendekatan Hilberg pada pendesainan *microstrip lines* untuk aplikasi antena. Desain *microstrip lines* dilakukan untuk struktur CPW (*Coplanar Waveguide*) dengan parameter geometri berupa lebar *strip* konduktor, jarak *strip* konduktor ke bidang *ground*, dan tebal substrat dielektrik. Ketiga parameter geometri tersebut merupakan besaran utama dari impedansi karakteristik CPW yang terformulasi dalam bentuk fungsi integral eliptik. Pada kajian disertasi ini penentuan ketiga parameter geometri CPW dilakukan menggunakan formula modulus fungsi integral eliptik, yang langkah perumusannya telah dipublikasikan pada Jurnal Ilmiah bereputasi Internasional (Rohedi dkk,2017a).

Desain CPW merujuk pada struktur geometri dalam Gambar 4.1 berikut,



Gambar 4.1. Struktur Geometri CPW

Formula impedansi karakteristik yang digunakan dalam pendesainan CPW tersebut mengacu pada hasil penerapan metode *conformal mapping* yang terangkum dalam Simons (2001). Pada desain CPW tersebut seluruh konduktor pada bagian *strip* dan

ground diasumsikan tidak memiliki ketebalan ($t=0$), demikian pula lebar kedua bidang *ground* diasumsikan takberhingga. Bahan dielektrik yang digunakan pada desain CPW dispesifikasi melalui nilai tetapan dielektriknya. Bahan dielektrik yang lazim digunakan dalam pembuatan CPW untuk aplikasi antena adalah bahan FR4 dengan nilai tetapan dielektrik ($\epsilon_r= 4.2$). Adapun formula eksak (*closed form*) impedansi karakteristik dan tetapan dielektrik efektif CPW berturut-turut adalah,

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{K(k')}{K(k)}, \quad (4.1)$$

dan

$$\epsilon_{eff} = 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{K(k')}{K(k)} \frac{K(k_1)}{K(k_1')} . \quad (4.2)$$

Dalam hal ini hubungan kedua modulus fungsi integral eliptik k dan k_1 terhadap ketiga parameter geometri CPW berturut-turut adalah,

$$k = \frac{a}{a + 2b}, \quad a = W/h, \quad b = G/h, \quad (4.3)$$

dan

$$k_1 = \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{4} a\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{4} [a + 2b]\right)}, \quad a = W/h, \quad b = G/h. \quad (4.4)$$

dimana k dan k_1 didekati dengan formula modulus fungsi integral eliptik yang diturunkan menggunakan pendekatan Hilberg sebagaimana disebutkan sebelumnya. Perlu diketahui pula bahwa dengan menggunakan Pers.(4.1) hingga Pers.(4.4), perumusan impedansi karakteristik CPW dapat dilakukan secara eksplisit sebagai fungsi dari parameter geometrinya. Parameter geometri tersebut adalah lebar *strip* konduktor W , jarak *strip* konduktor ke bidang *ground* G , dan

tebal substrat h . Pada perhitungan ini, semua fungsi integral eliptik pada impedansi karakteristik dalam Pers.(4.1) dan tetapan dielektrik efektif dalam Pers.(4.2) didekati dengan pendekatan Hilberg, yakni Pers.(3.1.14) hingga Pers. (3.1.16), Pers.(3.1.37), dan Pers.(3.1.39) untuk rentang modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, serta Pers.(3.1.17) hingga Pers.(3.1.19), Pers.(3.1.42), dan Pers.(3.1.44) untuk rentang modulus $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$.

Sebagaimana lazimnya fungsi sekaligus *microstrip lines* sebagai devais pencatu daya dan jalur transmisi sinyal informasi dari sumber ke antena, impedansi karakteristik CPW dipersyaratkan *matching* dengan impedansi antena. Pada desain CPW ini, antena diasumsikan memiliki impedansi karakteristik Z_0 tertentu sehingga CPW yang dihasilkan memenuhi kriteria *matching* impedansi tersebut. Pada kajian ini, ketiga parameter geometri CPW ditentukan dari hubungan kedua modulus k_1 dan k masing-masing fungsi integral eliptik penyusun formula impedansi karakteristiknya. Untuk maksud ini selanjutnya berturut-turut didefinisikan,

$$\frac{K(k_1)}{K(k_1')} = r_1 \quad (4.5)$$

dan

$$\frac{K(k)}{K(k')} = r \quad , \quad (4.6)$$

sehingga dari Pers.(4.1) dan Pers.(4.2) dapat dibentuk persamaan kuadrat berikut,

$$r^2 + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} r_1 r - \left(\frac{30\pi}{Z_0} \right)^2 = 0, \quad (4.7)$$

yang memberikan nilai r positif untuk setiap pasangan Z_0 dan r_1 , yaitu,

$$r = -\frac{\varepsilon_r - 1}{4} r_1 + \sqrt{\left(-\frac{\varepsilon_r - 1}{4} r_1 \right)^2 + \left(\frac{30\pi}{Z_0} \right)^2}. \quad (4.8)$$

Sebagaimana tampak pada Pers.(4.3) dan Pers.(4.4), ketaksesuaian ukuran persamaan (*rank deficient*) karena ketiga parameter CPW tercantum dalam kedua persamaan modulus diatasi dengan memperkenalkan dua parameter ternormalisasi $a = W/h$ dan $b = G/h$. Pada algoritma perhitungan kedua nilai parameter ternormalisasi untuk geometri CPW tersebut (selanjutnya disebut parameter geometri CPW), nilai fungsi integral eliptik r_1 divariasi sebagai nilai masukan (*input*) sehingga memberikan nilai r yang bervariasi pula. Nilai r_1 yang diinputkan tersebut juga akan memberikan nilai k_1 , yang dalam hal ini tetap digunakan formula modulus sebagaimana pada Pers.(3.1.46) hingga Pers.(3.1.48) dan Pers.(3.1.57) dengan menggantikan $r \rightarrow r_1$ dan $k \rightarrow k_1$. Sedangkan nilai r akan menentukan nilai modulus komplemen k' sesuai Pers.(3.1.58) hingga Pers.(3.1.60) dan Pers.(3.1.61). Oleh karena semua formula modulus fungsi integral eliptik k_1 dan k' dengan pendekatan Hilberg merupakan persamaan taklinier, maka penentuan kedua parameter geometri CPW dilakukan melalui penerapan metode numerik. Pada perhitungan ini digunakan metode Newton untuk penyelesaian persamaan taklinier serentak dengan dua perubah (Penny dan Lindfield,1994). Fungsi-fungsi penyelesaian dari kedua formula pendekatan modulus k_1 dan k untuk penyelesaian kedua persamaan taklinier serentak tersebut dinyatakan sebagai $f_{1,N}$ dan $f_{2,N}$, yaitu,

$$f_{1,N}(a,b) = \begin{cases} \sqrt{1-k_{1,N}^2} - k_{r_1',N} & , \quad r_1 < 1 \\ k_1 - k_{r_1,N} & , \quad r_1 \geq 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

dan

$$f_{2,N}(a,b) = \begin{cases} \sqrt{1-k^2} - k_{r',N} & r < 1 \\ k - k_{r,N} & , \quad r \geq 1, \end{cases} \quad (4.10)$$

dengan *subscript* N melambangkan orde pendekatan Hilberg yang digunakan. Sementara itu pasangan $(k_{r_1,N}, k_{r_1',N})$ dan $(k_{r,N}, k_{r',N})$ adalah formula modulus dan modulus komplemen berturut-turut untuk setiap nilai r_1 dan r . Sebagai

contoh, untuk formula modulus fungsi integral eliptik yang diturunkan menggunakan pendekatan Hilberg orde tiga, maka kedua persamaan taklinier yang mengandung formula modulus dan modulus komplemen tersebut adalah dalam bentuk,

$$f_{1,3}(a,b) = \begin{cases} \text{for } 0 \leq r_1 < 1 : C = \frac{2\pi_3}{r_1} - \ln \sqrt{2} \\ \sqrt{1-k_1^2} - \left[\frac{\coth(C) - \sqrt[4]{\coth^4(C)-1}}{\coth(C) + \sqrt[4]{\coth^4(C)-1}} \right]^2, \\ \text{for } r_1 \geq 1 : D = 2\pi_3 r_1 - \ln \sqrt{2} \\ k_1 - \left[\frac{\coth(D) - \sqrt[4]{\coth^4(D)-1}}{\coth(D) + \sqrt[4]{\coth^4(D)-1}} \right]^2, \end{cases} \quad (4.11)$$

dan

$$f_{2,3}(a,b) = \begin{cases} \text{for } 0 \leq r < 1 : E = \frac{2\pi_3}{r} - \ln \sqrt{2} \\ \sqrt{1-k^2} - \left[\frac{\coth(E) - \sqrt[4]{\coth^4(E)-1}}{\coth(E) + \sqrt[4]{\coth^4(E)-1}} \right]^2, \\ \text{for } r \geq 1 : F = 2\pi_3 r - \ln \sqrt{2} \\ k - \left[\frac{\coth(F) - \sqrt[4]{\coth^4(F)-1}}{\coth(F) + \sqrt[4]{\coth^4(F)-1}} \right]^2. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pada kedua persamaan taklinier tersebut telah digunakan definisi r dalam Pers.(4.8), dengan nilai π digantikan dengan π_3 yang nilainya ditentukan dari fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde tiga sebagaimana tertera pada Pers.(3.1.62d).

Pada kajian ini, perhitungan parameter ternormalisasi a dan b untuk geometri CPW dengan metode Newton dilakukan menggunakan perangkat Lunak *Matlab*. Semua hasil perhitungan ditampilkan dalam “*format long*” untuk mengetahui manakah diantara orde pendekatan Hilberg untuk formula modulus tersebut yang mampu menunjukkan akurasi presisi ganda yaitu benar hingga

minimal 15 angka penting. Sebagaimana dipahami walaupun jumlah angka penting sebagai indikator keseksamaan hasil pengukuran dalam tataran praktis umumnya hanyalah beberapa angka di belakang koma saja, namun *standart* hasil perhitungan menggunakan metode numerik adalah sah bilamana telah mencapai akurasi presisi ganda. Lebih lanjut, pada penerapan algoritma Newton, turunan parsial orde pertama yang diperlukan untuk perhitungan matrik jacobian didekati dengan metode *central difference* dengan lebar segmen $ls = 0.01$. Adapun *norm* toleransi untuk penghentian iterasi yang memberikan akurasi presisi ganda adalah dipatok pada nilai 10^{-15} . Pada perhitungan ini nilai Z_0 dalam Pers.(4.8) sebagai impedansi karakteristik tujuan (*goal*) dilambangkan dengan Z_{0g} . Adapun π_N adalah formula Pi dari masing-masing pendekatan Hilberg yang digunakan, yaitu yang tertera pada Per.(3.1.62).

Konfirmasi terhadap validasi hasil perhitungan parameter geometri CPW, dilakukan dengan memasukkan kembali nilai a dan b kedalam formula eksak impedansi karakteristik (Z_0) dan tetapan dielektrik efektif (ϵ_{eff}) dalam Pers.(4.1) dan Pers.(4.2). Pada Tabel 4.1 ditampilkan hasil perhitungan parameter geometri CPW menggunakan formula modulus pendekatan Hilberg orde nol dan orde tiga. Validasi akurasi dibedakan dari capaian jumlah angka penting impedansi karakteristik eksak Z_0 dalam mendekati nilai impedansi tujuan Z_{0g} yang dituju. Pada validasi tersebut nilai eksak π dan nilai eksak fungsi integral eliptik dilakukan menggunakan fasilitas “*vpa*” dan “*ellipke.m*” yang tersedia pada *Matlab toolbox*. Pada eksekusi perhitungan (*running program*) nilai tebakan awal untuk parameter geometri CPW yaitu a_0 dan b_0 ditentukan secara coba coba sedemikian memberikan nilai keluaran (*output*) perhitungan yang konvergen pada nilai yang tetap (*fix*). Hasil perhitungan parameter geometri CPW menggunakan bahan dielektrik FR4 dengan nilai tetapan dielektrik $\epsilon_r = 4.2$ ditampilkan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Parameter Geometri CPW dengan Substrat FR4 ($\epsilon_r = 4.2$) untuk $r_1 = 1$ dan $r_1 = 1/5$ dengan $Z_{0g} = 50\Omega$ Menggunakan Formula Modulus Pendekatan Hilberg Orde Nol dan Orde Tiga

| Besaran | $r_1 = 1/5$ | | $r_1 = 1$ | |
|------------------|-------------|-----------|-----------|----------|
| | $N = 0$ | $N = 3$ | $N = 0$ | $N = 3$ |
| a | 239.78443 | 233.20498 | 2.54696 | 2.48938 |
| b | 4.11954 | 4.11745 | 0.21438 | 0.21429 |
| ϵ_{eff} | 1.18380 | 1.18478 | 2.276461 | 2.28236 |
| Z_0 | 49.77510 | 49.99999 | 49.80125 | 50.00000 |

Tampak bahwa a dan b nilai parameter geometri CPW serta nilai tetapan dielektrik hasil perhitungan dengan formula modulus pendekatan Hilberg orde tiga lebih akurat dari hasil formula modulus pendekatan Hilberg orde nol. Hal ini diketahui dari hasil perhitungan impedansi karakteristik eksak Z_0 nya yang paling mendekati nilai impedansi karakteristik tujuan Z_{0g} , dengan capaian angka penting (dijit benar) hingga 15 angka di belakang koma. Namun seperti tampak pada Tabel 4.1, semua hasil perhitungan dari kedua nilai parameter geometri CPW tersebut ditampilkan hanya sampai 5 angka di belakang koma. Pada hasil perhitungan dalam Tabel 4.1 tersebut terdapat sifat penting, yakni pada $r_1 = 1$ yang memberikan nilai parameter geometri CPW yang lebih kecil daripada hasil perhitungan pada $r_1 = 1/5$. Berdasar fakta ini, pada Tabel 4.2, ditampilkan komparasi hasil perhitungan parameter geometri CPW menggunakan formula modulus pendekatan Hilberg orde tiga untuk nilai tetapan dielektrik $\epsilon_r = 4.2$ dan $\epsilon_r = 5$, pada $r_1 = 1$ dengan nilai impedansi karakteristik tujuan $Z_{0g} = 45\Omega$ dan $Z_{0g} = 50\Omega$.

Tabel 4.2. Parameter Geometri CPW untuk $r_1 = 1$, dengan $\varepsilon_r = 4.2$ dan $\varepsilon_r = 5$ pada $Z_{0g} = 45\Omega$ dan $Z_{0g} = 50\Omega$ Menggunakan Formula Modulus Pendekatan Hilberg Orde Tiga

| Besaran | $Z_{0g} = 45\Omega$ | | $Z_{0g} = 50\Omega$ | |
|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| | $\varepsilon_r = 4.2$ | $\varepsilon_r = 5$ | $\varepsilon_r = 4.2$ | $\varepsilon_r = 5$ |
| a | 4.89561 | 3.25207 | 2.48938 | 1.49755 |
| b | 0.22049 | 0.21871 | .214290 | 0.19111 |
| ε_{eff} | 2.10958 | 2.51414 | 2.28236 | 2.76399 |
| Z_0 | 45.00000 | 45.00000 | 50.00000 | 50.00000 |

Sebagaimana tertera pada Tabel 4.2, untuk nilai $r_1 = 1$, kedua nilai tetapan dielektrik dan impedansi karakteristik tujuan yang semakin besar memberikan nilai parameter geometri a dan b yang semakin kecil. Didapatkan pula bahwa parameter geometri CPW hasil perhitungan pada $r_1 = 1$ adalah yang paling kecil dibandingkan hasil perhitungan nilai r_1 yang lebih kecil dari 1.

Pada desain CPW, untuk merekomendasi penggunaan bahan dielektrik adalah dipandang perlu untuk melakukan simulasi perhitungan nilai tetapan dielektriknya. Pada bagian ini perhitungan dilakukan dengan mengasumsikan bahwa untuk setiap impedansi karakteristik tujuan, nilai parameter geometri CPW dan impedansinya telah diketahui. Dengan asumsi tersebut, persoalan perhitungan nilai tetapan dielektrik bahan CPW tereduksi ke persoalan penyelesaian persamaan taklinier satu perubah. Dalam hal ini perhitungan dilakukan menggunakan formula impedansi karakteristik dalam Pers.(4.1) dengan memasukkan suku tetapan dielektrik efektif dari Pers.(4.2). Fungsi persamaan taklinier untuk perhitungan nilai tetapan dielektrik bahan CPW tersebut adalah dalam bentuk,

$$f(\varepsilon_r) = Z_{0g} - \frac{30\pi}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{K(k')}{K(k)} \frac{K(k_1)}{K(k_1')}}} \frac{K(k')}{K(k)}, \quad (4.13)$$

dengan definisi k dan k_1 sebagaimana pada Pers.(4.3) dan Pers.(4.4). Demikian pula $\frac{K(k)}{K(k')}$ dan $\frac{K(k_1)}{K(k_1')}$ dapat didekati dengan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg sebagaimana dijelaskan di atas. Pada hasil perhitungan tetapan dielektrik bahan CPW yang ditampilkan dalam Tabel 4.3, telah digunakan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde tiga. Adapun perhitungan penyelesaian persamaan taklinier satu perubah dalam Pers.(4.13) di atas dilakukan menggunakan fasilitas *fzero.m* yang tersedia dalam *Matlab toolbox*. Nilai tebakan awal tetapan dielektrik bahan CPW dilakukan dengan coba coba sedemikian sehingga memberikan nilai tetapan dielektrik keluaran yang konvergen pada satu nilai yang tetap (*fix*).

Tabel 4.3. Nilai Permittivitas Bahan Dielektrik CPW untuk Impedansi Tujuan $Z_{0g} = 50\Omega$ dan $Z_{0g} = 75\Omega$ Menggunakan Formula Modulus Pendekatan Hilberg Orde Tiga

| No | $a < b$ | | | | $a > b$ | | | |
|----|---------|-----|------------------|--------------|---------|-----|------------------|--------------|
| | a | b | $Z_{0g}(\Omega)$ | ϵ_r | a | b | $Z_{0g}(\Omega)$ | ϵ_r |
| 1 | 1 | 2 | 50 | 38.742 | 2 | 1 | 50 | 15.325 |
| 2 | 3 | 5 | 50 | 70.109 | 5 | 3 | 50 | 32.447 |
| 3 | 1 | 2 | 75 | 16.003 | 2 | 1 | 75 | 5.714 |
| 4 | 3 | 5 | 75 | 28.096 | 5 | 3 | 75 | 11.777 |

Dari hasil perhitungan dalam Tabel 4.3 tersebut diperoleh bahwa untuk setiap impedansi karakteristik tujuan, nilai rasio lebar *strip* terhadap jarak *strip* ke bidang *ground* yang lebih besar memberikan nilai tetapan dielektrik yang lebih kecil. Hubungan berbalikan ini juga berlaku pada setiap nilai rasio lebar *strip* terhadap jarak *strip* ke bidang *ground* yang digunakan, dimana nilai tetapan dielektrik bahan CPW berbanding terbalik dengan nilai impedansi karakteristik tujuan.

4.2. Analisis Konvergensi Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama

Perbaikan tingkat konvergensi deret takhingga integral eliptik lengkap macam pertama bentuk *original* $K(k)$ dalam Pers.(3.2.2), bentuk baru $K(k)_N$ dalam Pers. (3.2.12), dan deret takhingga hasil iterasi pertama $K_1(k)_N$ dalam (3.2.42) dapat dilacak dari jumlah angka penting untuk setiap suku tertinggi yang digunakan (Rohedi dkk,2017b).

Tabel 4.4. Jumlah Angka Penting Capaian Deret Takhingga Integral Eliptik dengan Enam Suku Deret dari Bentuk Original, Bentuk Baru dan Hasil Iterasi Pertamanya.

| ℓ | $K(k)$ | | | $K(k)_N$ | | | $K_1(k)_N$ | | |
|--------|----------|----------------|----------|----------|----------------|----------|------------|----------------|----------|
| | $k=1/10$ | $k=1/\sqrt{2}$ | $k=9/10$ | $k=1/10$ | $k=1/\sqrt{2}$ | $k=9/10$ | $k=1/10$ | $k=1/\sqrt{2}$ | $k=9/10$ |
| 0 | 3 | 1 | 0 | 5 | 2 | 1 | 12 | 3 | 2 |
| 1 | 5 | 1 | 0 | 10 | 3 | 2 | 23 | 8 | 5 |
| 2 | 7 | 2 | 1 | 15 | 3 | 2 | 29 | 10 | 7 |
| 3 | 9 | 2 | 1 | 20 | 5 | 2 | 41 | 15 | 8 |
| 4 | 11 | 2 | 1 | 24 | 6 | 2 | 55 | 19 | 10 |
| 5 | 13 | 3 | 1 | 30 | 7 | 2 | 67 | 23 | 12 |

Hasil perhitungan untuk tiga nilai modulus k sebagaimana ditunjukkan dalam Tabel 4.4, mengkonfirmasi bahwa capaian jumlah angka penting deret takhingga baru integral eliptik lengkap macam pertama hasil iterasi fungsi transformasi tersebut lebih banyak dari deret takhingga integral eliptik macam pertama *originalnya*. Jumlah capaian angka penting tersebut bersesuaian dengan akurasi hasil perhitungan integral eliptik macam pertama dalam pemakaiannya.

Meskipun jumlah angka penting untuk semua nilai modulus k sebagaimana pada Tabel 4.4 meningkat dengan bertambahnya jumlah suku deret yang digunakan dalam masing masing deret takhingga integral eliptik, namun seberapa besar peningkatan jumlah angka penting tidak dapat diprediksi. Namun, dari Tabel 4.5, oleh karena rasio jumlah angka penting masing-masing suku pertama

Tabel 4.5. Capaian Jumlah Angka Penting Deret Takhingga $K_{m,\ell}(k)_N$ dan $K_{m,\ell}(k)$ untuk Suku Pertama ($\ell = 0$)

| | $m = 1$ | | $m = 2$ | | $m = 3$ | | $m = 4$ | |
|--------------|---------------------------------|---|---------------------------------|----|---------------------------------|----|---------------------------------|----|
| k | $K_{1,0}(k)_N \quad K_{1,0}(k)$ | | $K_{2,0}(k)_N \quad K_{2,0}(k)$ | | $K_{3,0}(k)_N \quad K_{3,0}(k)$ | | $K_{4,0}(k)_N \quad K_{4,0}(k)$ | |
| $1/10$ | 12 | 6 | 25 | 12 | 50 | 24 | 101 | 51 |
| $1/2$ | 5 | 3 | 13 | 6 | 27 | 13 | 54 | 27 |
| $1/\sqrt{2}$ | 3 | 2 | 10 | 4 | 21 | 11 | 43 | 21 |
| $9/10$ | 2 | 1 | 6 | 3 | 13 | 7 | 30 | 15 |

$K_{m,\ell}(k)_N$ antar hasil dua iterasi berurutan adalah sekitar 2. Hal ini berarti konvergensi deret takhingga hasil fungsi transformasi baru yang dikembangkan pada disertasi ini bersesuaian dengan tingkat konvergensi lipat dua (*quadratic level of convergence*). Demikian pula, walaupun penerapan skema iterasi terhadap

$$K_m(k)_N = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_{m-1} \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right)_N \text{ dalam Pers.(3.2.39) untuk fungsi transformasi}$$

$$\text{baru dan penerapan skema iterasi terhadap } K_m(k) = \frac{1}{\sqrt{k'}} K_{m-1} \left(\frac{1-k'}{2j\sqrt{k'}} \right) \text{ untuk}$$

integral eliptik original dalam Pers.(3.2.2), sama sama menghasilkan tingkat konvergensi lipat dua, namun faktanya jumlah capaian angka penting $K_{m,0}(k)_N$ selalu dua kali lebih banyak daripada capaian $K_{m,0}(k)$ sebagaimana ditunjukkan dalam Tabel 4.5.

4.3. Komparasi Hasil Perhitungan Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar dari Formula Xiang dan Formula Empiris Baru

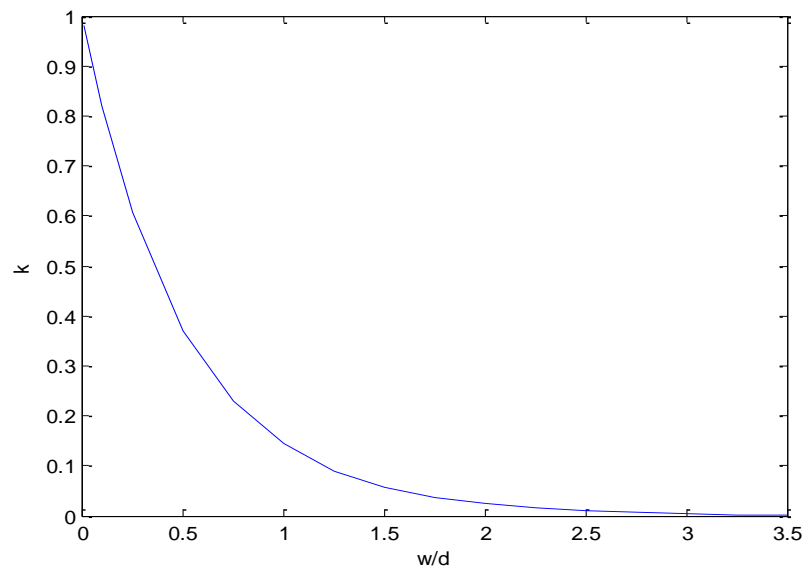
Sebagaimana dipaparkan sebelumnya, bahwa semua formula pendekatan untuk kapasitansi kapasitor pelat sejajar adalah berbentuk eksplisit sebagai fungsi dari rasio lebar dan jarak pisah antar pelatnya, dan hanyalah formula eksak kapasitansi Palmer yang berbentuk implisit (Rohedi dkk,2017c). Perhitungan nilai kapasitansi persatuan panjang dari formula kapasitansi Palmer dalam Pers.(3.3.2)

hingga Pers.(3.3.6) dilakukan menggunakan perangkat lunak *Matlab*. Dalam hal ini, nilai numerik dari integral eliptik macam pertama dan macam kedua dihitung dengan *ellipke.m*, sedangkan penyelesaian persamaan implisit dalam Pers.(3.3.3) untuk mendapatkan nilai modulus fungsi integral eliptik dilakukan dengan *fzero.m*. Hasil perhitungan nilai modulus dari fungsi integral eliptik *k* berikut nilai kapasitansi persatuan panjang kapasitor pelat sejajar untuk variasi nilai rasio lebar dan jarak pisah antar pelat ditampilkan dalam Tabel 4.6 berikut.

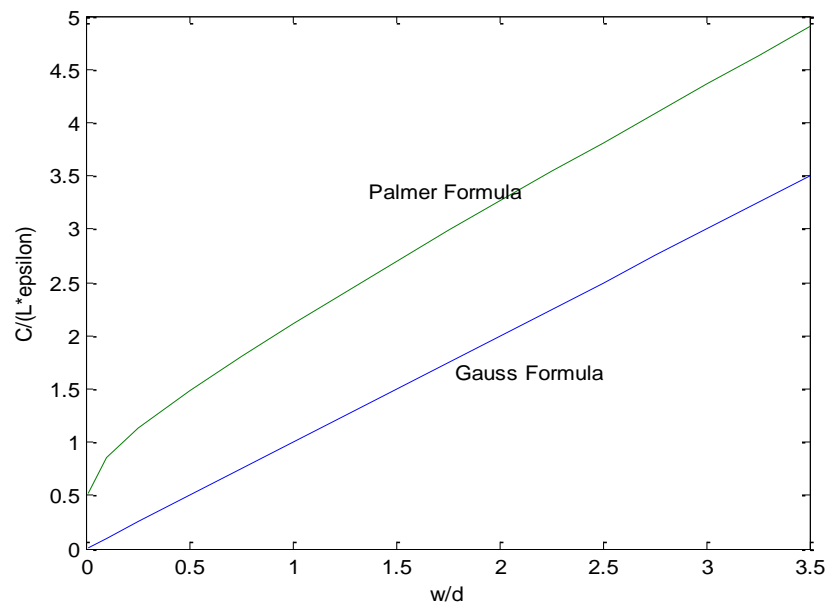
Tabel 4.6. Kapasitansi Persatuan Panjang Kapasitor Pelat Sejajar dari Formula Palmer

| $\frac{w}{d}$ | k | $\frac{C}{\epsilon \ell} \Big _{\text{Palmer}}$ |
|---------------|--------|---|
| 0.50 | 0.3713 | 1.4899 |
| 0.75 | 0.2294 | 1.8111 |
| 1.00 | 0.1433 | 2.1158 |
| 1.25 | 0.0905 | 2.4108 |
| 1.50 | 0.0576 | 2.6994 |
| 1.75 | 0.0369 | 2.9833 |
| 2.00 | 0.0238 | 3.2635 |
| 2.25 | 0.0154 | 3.5408 |
| 2.50 | 0.0100 | 3.8157 |
| 2.75 | 0.0065 | 4.0887 |

Adapun plot dari variasi nilai $\frac{w}{d}$ terhadap variasi nilai modulus fungsi integral eliptik k ditampilkan dalam Gambar 4.2.a, sedangkan plot dari variasi nilai $\frac{w}{d}$ terhadap variasi nilai $\frac{C}{\epsilon \ell} \Big|_{\text{Palmer}}$ ditampilkan dalam Gambar 4.2.b (Rohedi dkk,2017c).



4.2.a



4.2.b

Gambar 4.2. a. Plot Nilai $\frac{w}{d}$ Terhadap k , b. Plot Nilai $\frac{w}{d}$ Terhadap $\left. \frac{C}{\epsilon \ell} \right|_{\text{Palmer}}$

Sementara itu komparasi hasil perhitungan formula kapasitansi pendekatan Xiang dalam Pers.(3.3.10) dan formula Love dalam Pers.(3.3.11) terhadap kapasitansi eksak Palmer ditampilkan dalam Tabel 4.7 berikut,

Tabel 4.7. Komparasi Kapasitansi Formula Pendekatan Xiang dan Formula Love terhadap Formula Kapasitansi Eksak Palmer

| $\frac{w}{d}$ | $\frac{C}{\epsilon\ell}\Big _{Love}$ | $\frac{C}{\epsilon\ell}\Big _{Xiang}$ | $\frac{C}{\epsilon\ell}\Big _{Palmer}$ |
|---------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1.00 | 1.9033 | 1.4413 | 2.1158 |
| 2.00 | 3.1239 | 2.4413 | 3.2634 |
| 3.00 | 4.2530 | 3.4413 | 4.3599 |
| 4.50 | 5.8820 | 4.9413 | 5.9630 |
| 5.00 | 6.4156 | 5.4413 | 6.4906 |

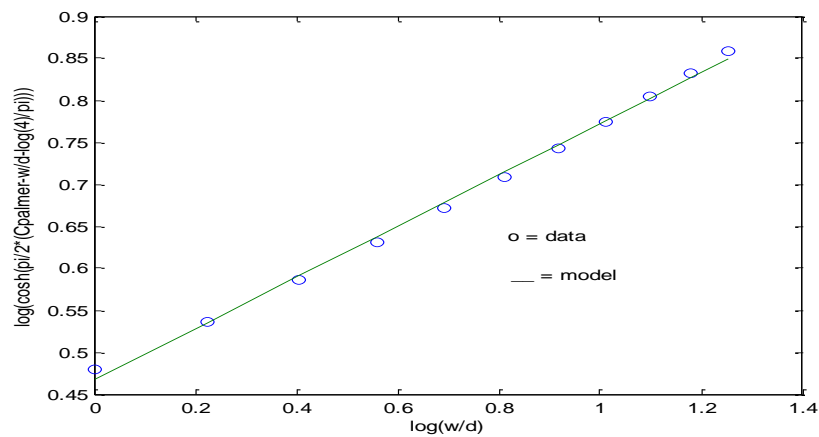
Tampak bahwa untuk seluruh nilai rasio $\frac{w}{d}$, nilai kapasitansi persatuan panjang kapasitor pelat sejajar hasil perhitungan formula Love lebih dekat terhadap kapasitansi eksak Palmer, sehingga lebih akurat daripada formula Xiang. Diverifikasikan pula bahwa kontribusi pengaruh *fringing-field* dari formula Xiang selalu mendekati tetap di kisaran $\frac{1}{\pi} \ln 4 \approx 0.4413$.

Pada kajian disertasi ini, kedua tetapan empiris a dan b dalam rumus empiris kapasitansi kapasitor pelat sejajar juga dilakukan menggunakan perangkat lunak *Matlab*. Dalam hal ini digunakan *polyfit.m* dengan memberi nilai 1 untuk orde regresi sebagai pertanda digunakannya proses regresi linier. Pasangan data rasio lebar dan jarak antar pelat dalam rentang $1 \leq \frac{w}{d} \leq 3.5$ berikut nilai kapasitansi persatuan panjangnya $\frac{C}{\epsilon\ell}\Big|_{Palmer}$ adalah sebagaimana pada Tabel 4.6, yang kemudian disubstitusikan ke dalam Pers.(3.3.19) dan (3.3.20). Proses regresi linier dengan *polyfit.m* tersebut memberikan nilai pengepas kurva $a = 4.6322$ dan $b = 0.3048$.

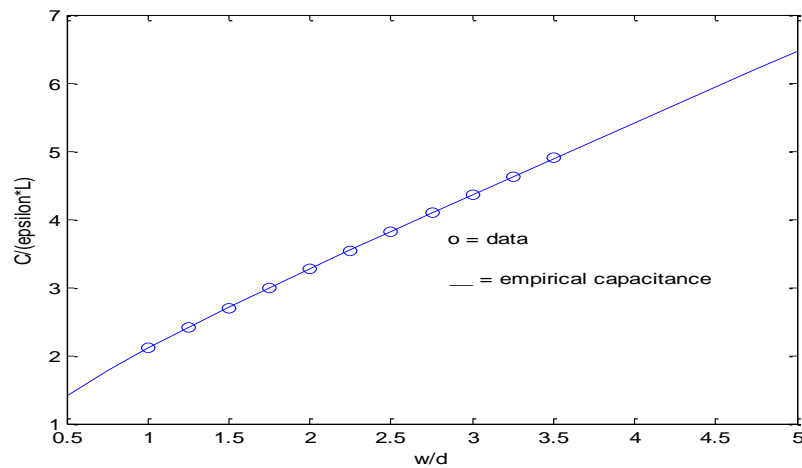
Dengan demikian formula empiris baru untuk kapasitansi kapasitor pelat sejajar tersebut berbentuk,

$$\left. \frac{C}{\epsilon \ell} \right|_{\text{Empiris Baru}} = \frac{w}{d} + \frac{\ln 4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cosh^{-1} \left(4.6322 \frac{w}{d} \right)^{0.3048}. \quad (4.14)$$

Pengepasan kurva dari proses regresi tersebut diberikan dalam Gambar 4.3 (Rohedi dkk,2017c).



4.3.a



4.3.b

Gambar 4.3. a. Regresi dalam Ranah Linierisasi,
b. Hasil Perhitungan Kapasitansi dengan Formula Empiris Baru

Sementara itu komparasi hasil perhitungan kapasitansi kapasitor pelat sejajar dengan formula empiris baru terhadap hasil formula empiris Mejis-Fokkema dan kapasitansi eksak Palmer ditampilkan dalam Tabel 4.8.

Tabel 4.8. Komparasi Kapasitansi Formula Empiris Baru terhadap Formula Mejis-Fokkema dan Formula Eksak Palmer

| $\frac{w}{d}$ | $\frac{C}{\epsilon \ell} \Big _{Mejis-Fokkema}$ | $\frac{C}{\epsilon \ell} \Big _{Present Work}$ | $\frac{C}{\epsilon \ell} \Big _{Palmer}$ |
|---------------|---|--|--|
| 0.50 | 1.3913 | 1.4165 | 1.4899 |
| 0.75 | 1.7364 | 1.7816 | 1.8111 |
| 1.00 | 2.0600 | 2.1056 | 2.1157 |
| 1.50 | 2.6731 | 2.7031 | 2.6994 |
| 2.00 | 3.2606 | 3.2689 | 3.2634 |
| 2.50 | 3.8329 | 3.8186 | 3.8157 |
| 3.00 | 4.3950 | 4.3585 | 4.3599 |
| 3.50 | 4.9498 | 4.8198 | 4.8984 |
| 4.00 | 5.4991 | 5.4203 | 5.4324 |
| 4.50 | 6.0439 | 5.9453 | 5.9630 |
| 5.00 | 6.5851 | 6.4675 | 6.4906 |
| 5.50 | 7.1233 | 6.9875 | 7.0161 |
| 6.00 | 7.6590 | 7.5056 | 7.5395 |
| 7.00 | 8.7242 | 8.5376 | 8.5816 |
| 10.00 | 11.8850 | 11.6109 | 11.6937 |

Tampak bahwa untuk seluruh variasi nilai rasio lebar dan jarak antar pelat kapasitor sejajar $\frac{w}{d}$, hasil perhitungan formula kapasitansi empiris baru pada kajian disertasi ini (*the present work*) lebih mendekati hasil perhitungan formula eksak Palmer, sehingga lebih akurat daripada kapasitansi formula empiris Mejis-Fokkema.

Bahkan lebih akurat pula dari kapasitansi formula pendekatan Xiang and Love. Berdasar fakta hasil perhitungan kapasitansi tersebut, disimpulkan bahwa kapasitansi formula empiris baru ini lebih akurat daripada semua formula pendekatan kapasitansi yang ada. Namun, tetap diperlukan upaya untuk mengembangkan pendekatan baru lainnya yang juga memberikan kapasitansi akurat untuk rentang rasio $\frac{w}{d}$ di luar yang digunakan dalam proses regresi. Terdapat fakta menarik bahwa penerapan linierisasi yang sesuai terhadap formula empiris kapasitansi kapasitor pelat sejajar, maka proses regresi linier dapat melaksanakan tugasnya dalam menentukan nilai konstanta empiris a dan b melalui parameter pengepas.

4.4. Pembahasan

Pada sub bab pembahasan ini akan dipaparkan sejauh mana kegiatan kajian yang telah dilakukan dapat menjawab hal-hal yang telah digariskan dalam tujuan penelitian. Capaian tersebut dituangkan dalam sub bab berikut.

4.4.1. Capaian Penerapan Fungsi Identitas Transformasi Joukowski pada Rekonstruksi Fungsi Integral Eliptik Pendekatan Hilberg Orde Satu

Sebagaimana telah dipaparkan dalam sub bab 2.10, fungsi identitas transformasi Joukowski yang mentransformasi fungsi Joukowski ke dalam fungsi eksponensial ranah baru sebagaimana pada Pers.(2.70) telah berhasil merekonstruksi perumusan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg. Langkah perumusannya diawali dari perumusan untuk pendekatan Hilberg orde satu pada Pers.(2.71), hingga terbentuk pendekatan fungsi integral eliptik bermodulus baru (diistilahkan dengan modular baru) sebagaimana tertera pada Pers.(2.72). Hubungan modular asli dan baru tersebut ditunjukkan dalam Pers.(2.75). Dari pengungkapan identitas fungsi logaritmik dalam Pers.(2.83) diperoleh identitas Joukowski pada Pers.(2.87). Identitas Joukowski ini selanjutnya digunakan untuk membangun skema iterasi argumen logaritmik untuk merumuskan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde tinggi sebagaimana dipaparkan dalam sub bab 3.1.2. Keberhasilan skema iterasi baru dalam mempersingkat langkah iterasi perumusan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg tersebut telah terpublikasi pada Jurnal Ilmiah bereputasi Internasional (Rohedi dkk, 2017a).

4.4.2. Capaian Penciptaan Skema Iterasi Baru Perumusan Deret Takhingga Integral Eliptik Lengkap Macam Pertama untuk Perhitungan Fungsi Integral Eliptik pada Formula Impedansi Karakteristik Hasil Perumusan *Conformal Mapping*.

Penciptaan deret takhingga baru untuk integral eliptik macam lengkap pertama sebagaimana dipaparkan dalam sub bab 3.2, telah melahirkan demikian banyak fungsi transformasi baru berikut deret takhingganya sesuai urutan iterasinya. Sebagaimana diketahui, deret takhingga integral eliptik lengkap macam pertama merupakan penyusun dari fungsi integral eliptik $\frac{K(k)}{K(k')}$ yang lazim digunakan dalam perhitungan impedansi karakteristik *microstrip lines*. Fungsi integral eliptik yang dibentuk dari deret takhingga integral eliptik macam pertama bentuk asli dalam Pers.(3.2.3) adalah dalam bentuk

$$\frac{K(k)}{K(k')} = \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \left(\frac{5}{16}\right)^2 k^6 + \left(\frac{35}{128}\right)^2 k^8 + \dots}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{5}{16}\right)^2 k'^6 + \left(\frac{35}{128}\right)^2 k'^8 + \dots}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (4.15)$$

Namun, oleh karena konvergensi deret takhingga integral eliptik lengkap macam pertama bentuk asli tersebut sangat lambat sebagaimana dikonfirmasi dalam Tabel 3.6, Tabel 4.4, dan Tabel 4.5, maka fungsi integral eliptik direkomendasikan untuk menggunakan deret takhingga fungsi transformasi yang diperoleh menggunakan skema iterasi baru yang konvergensinya jauh lebih cepat (Rohedidkk, 2017b). Sebagai contoh bila digunakan deret takhingga fungsi transformasi iterasi keempat dalam Pers.(3.2.61), maka fungsi integral eliptik yang dimaksudkan adalah dalam bentuk,

$$\left[\frac{K(k)}{K(k')} \right]_{4,0} = \sqrt{\frac{1 + k^2 + 6k + 6(1+k)\sqrt{4k} + 6(1+\sqrt{k})^2 \times \sqrt{4(1+k)\sqrt{4k}} + 12(\sqrt{1+k} + \sqrt{4k})^2 (1+\sqrt{k})\sqrt{4(1+k)\sqrt{4k}}}{1 + k'^2 + 6k' + 6(1+k')\sqrt{4k'} + 6(1+\sqrt{k'})^2 \times \sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}} + 12(\sqrt{1+k'} + \sqrt{4k'})^2 (1+\sqrt{k'})\sqrt{4(1+k')\sqrt{4k'}}}}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (4.16)$$

Penggunaan deret takhingga fungsi transformasi integral eliptik lengkap macam pertama hasil iterasi orde yang semakin tinggi akan memberikan nilai fungsi integral eliptik yang semakin akurat.

4.4.3. Capaian Penerapan Skema Iterasi Baru untuk Perumusan Pendekatan Modulus Fungsi Integral Eliptik

Penggunaan skema iterasi baru perumusan fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg sebagaimana telah dipaparkan dalam sub bab 3.1.1 dan sub bab 3.1.2 telah memfasilitasi perumusan formula pendekatan modulus fungsi integral eliptik. Walaupun perumusan nilai eksak modulus fungsi integral eliptik sudah dipublikasikan sebelumnya oleh Borwein dan Borwein (1984) serta oleh Muzaffar dan Williams (2006), namun upaya menerapkan formula pendekatan modulus fungsi integral eliptik pada penentuan parameter geometri CPW baru pertama kali dilakukan dalam kajian disertasi ini (Rohedi dkk, 2017a). Untuk contoh, formula pendekatan modulus hasil skema baru pendekatan Hilberg orde tiga untuk rentang

modulus $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ yang tertera dalam Pers.(3.1.61), dan untuk rentang modulus

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq k \leq 1$ pada Pers.(3.1.57) sebagaimana dikonfirmasi dalam Tabel 3.3

memberikan akurasi hingga presisi lipat empat (*quartic precision*), atau benar hingga 32 angka di belakang koma. Capaian akurasi yang demikian tinggi tersebut amat bermanfaat dalam penentuan parameter geometri *microstrip lines* sebagaimana akan dipaparkan dalam sub bab berikut.

4.4.4 Capaian Penerapan Formula Modulus Integral Eliptik Hasil Skema Baru Pendekatan Hilberg pada Pendesainan *Microstrip Lines* Struktur CPW

Indikasi keberhasilan formula modulus fungsi integral eliptik hasil perumusan skema baru pendekatan Hilberg pada perancangan *microstrip lines* struktur CPW tampak dari capaian nilai impedansi karakteristiknya yang sesuai dengan impedansi karakteristik tujuan. Data dalam Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 menunjukkan bahwa hasil perhitungan impedansi karakteristik CPW menggunakan formula modulus integral eliptik pendekatan Hilberg orde tiga untuk semua nilai tetapan dielektrik dan parameter geometrinya telah sesuai dengan nilai impedansi

karakteristik tujuan yang dikehendaki. Hal ini sebagai dasar atas rekomendasi pemakaian formula modulus integral eliptik pendekatan Hilberg orde tiga tersebut untuk pendesainan *microstrip lines* struktur lainnya (Rohedi dkk, 2017a). Adapun data perhitungan nilai tetapan dielektrik Tabel 4.3 dapat digunakan sebagai dasar pensintesaan bahan dielektrik baru sebagai bahan alternatif pembuatan *microstrip lines* selain bahan FR4 yang lazim digunakan selama ini.

4.4.5 Capaian dalam Mengkomparasi Perhitungan Kapasitansi Kapasitor Pelat Sejajar

Terhadap hasil perhitungan dalam Tabel 4.7 bahwa akurasi formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar pendekatan Xiang (2006) dalam Pers.(3.3.10) sangat tidak akurat terhadap nilai kapasitansi eksak versi Palmer (1937) membutuhkan gagasan baru dalam mendefinisikan modular baru. Hal ini berarti pendefinisian modular baru “ x ” dari fungsi integral eliptik dalam Pers.(2.72) tidak serta merta berbanding lurus dengan rasio lebar pelat terhadap jarak antar pelat kapasitor pelat sejajar. Di pihak lain hasil perhitungan formula empiris baru dalam Pers.(3.3.8) yang dituliskan kembali dalam Pers.(4.14) untuk kapasitansi persatuan panjang kapasitor pelat sejajar yang menunjukkan akurasi yang lebih tinggi dibandingkan formula kapasitansi pendekatan lainnya. Terhadap Pers.(4.14) selanjutnya didekati dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\mathcal{E} \ell} \right|_{\text{Empiris Baru}} = \frac{w}{d} + \frac{\ln 4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cosh^{-1} \left(4 \frac{w}{d} \right)^{1/3}. \quad (4.17)$$

maka diperlukan dua hal penting berikut. Pertama perlu dikembangkan pendekatan *conformal mapping* untuk mendapatkan formula kapasitansi kapasitor pelat sejajar tersebut. Kedua, Jika dua suku terakhir dalam Pers.(4.17) tersebut ditulis secara kesatuan dalam bentuk,

$$\left. \frac{C}{\mathcal{E} \ell} \right|_{\text{Empiris Baru}} = \frac{w}{d} + \frac{2}{\pi} \ln \left\{ 2 \left[\left(4 \frac{w}{d} \right)^{1/3} + \sqrt{\left(4 \frac{w}{d} \right)^{2/3} - 1} \right] \right\} \quad (4.18)$$

dan mengingat suku kedua dalam Pers.(4.18) yang merupakan suku *fringing field* kapasitansi kapasitor pelat sejajar, yang dalam hal ini bersesuaian dengan bentuk

fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde nol, maka dapat diajukan hipotesa bahwa suku *fringing field* kapasitansi kapasitor pelat sejajar mengikuti bentuk fungsi integral eliptik (Rohedi dkk, 2017c).

$$\frac{C}{\varepsilon \ell} \Big| = \frac{w}{d} + \frac{K(k_f)}{K(k_f')}, \quad (4.19)$$

dengan k_f adalah nilai modulus fungsi integral eliptik untuk suku *fringing field*. Untuk formula empiris baru dalam Pers.(4.17) dan Pers.(4.18) di atas, nilai modulus integral eliptiknya terdefinisi dalam bentuk,

$$k_f = \sqrt{1 - \frac{\left[\left(4 \frac{w}{d} \right)^{1/3} + \sqrt{\left(4 \frac{w}{d} \right)^{2/3} - 1} \right]^2 - 1}{\left[\left(4 \frac{w}{d} \right)^{1/3} + \sqrt{\left(4 \frac{w}{d} \right)^{2/3} - 1} \right]^2 + 1}} \quad (4.20)$$

Pada perumusan kapasitansi kapasitor pelat sejajar hasil formula empiris versi Mejis-Fokkema sebagaimana tertera pada Pers.(3.3.2), oleh karena nilai tetapan empiris 1.06 mendekati suku nilai $\frac{\pi e}{8}$ yang hadir pada penjabaran formula kapasitansi pendekatan Love dalam Pers.(3.3.16), maka formula empiris Mejis-Fokkema dapat didekati ke dalam bentuk (Rohedi dkk, 2017c),

$$\frac{C}{\varepsilon \ell} \Big|_{Mejis-Fokkema} = \frac{w}{d} + \frac{\pi e}{8} \left(\frac{w}{d} \right)^{1/4} \quad (4.21)$$

dengan e adalah bilangan euler, ε adalah permitivitas bahan pengisi diantara kedua pelat, w adalah lebar pelat dan d adalah jarak antar pelat kapasitor pelat sejajar.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan terhadap hasil kajian disertasi ini disimpulkan sebagai berikut:

Fungsi identitas transformasi Joukowski dapat merekonstruksi fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg orde satu yang selanjutnya menjadi basis perumusan fungsi integral eliptik orde pendekatan yang lebih tinggi (Rohedi dkk, 2017a). Sedangkan identitas Joukowski melahirkan skema iterasi baru pendekatan Hilberg yang dapat mengurangi langkah iterasi perumusan argumen logaritmik fungsi integral eliptik. Dengan skema baru tersebut argumen logaritmik pendekatan orde tinggi dapat dirumuskan secara eksplisit atas argumen logaritmik dari orde pendekatan yang lebih rendah. Tingkat konvergensi lipat dua yang dicapai fungsi integral eliptik hasil skema iterasi baru pendekatan Hilberg tersebut bersesuaian dengan tingkat konvergensi deret takhingga baru integral eliptik lengkap macam pertama yang dikembangkan dalam kajian disertasi ini (Rohedi dkk, 2017b). Skema iterasi baru pendekatan Hilberg tersebut juga menghadirkan formula pendekatan modulus fungsi integral eliptik. Implementasi formula modulus pendekatan orde tiga pada pendesainan devais CPW (*Coplanar Waveguide*) menghasilkan nilai parameter geometri yang memenuhi kriteria *matching impedance* untuk aplikasi pencatu daya (*feed line*) antena. Dari pendesaian devais CPW yang telah dilakukan, adalah memungkinkan untuk membuat devais CPW dalam ukuran yang lebih kecil dari yang telah dicapai selama ini. Implementasi fungsi integral eliptik modular baru yang dikembangkan dalam kajian disertasi ini memberikan konfirmasi bahwa hasil perhitungan nilai kapasitansi kapasitor pelat sejajar dengan formula Xiang (2006) yang mendefinisikan modular baru tersebut berbanding lurus terhadap rasio lebar dan jarak antar pelat adalah tidak akurat terhadap nilai kapasitansi eksak versi Palmer (1937). Sebaliknya kesesuaian model kapasitansi empiris baru terhadap kapasitansi eksak Palmer (bahkan juga lebih akurat dari formula pendekatan kapasitansi yang ada) menghasilkan hipotesa baru bahwa suku *fringing field*

kapasitor pelat sejajar dapat diformulasikan dalam fungsi integral eliptik (Rohedi dkk, 2017c).

5.2. Saran

Beberapa hal yang disarankan untuk dikaji lebih lanjut diantaranya adalah

- menerapkan fungsi integral eliptik hasil deret takhingga fungsi transformasi integral eliptik lengkap macam pertama sebagaimana contohnya dalam Pers.(4.16) pada pendesainan *microstrip lines* secara umum.
- menghadirkan formula modulus fungsi integral eliptik pendekatan Hilberg di atas orde tiga guna meningkatkan tingkat akurasi hasil desain *microstrip lines*.
- mengembangkan perumusan suku kapasitansi *fringing field* struktur *microstrip lines* dalam fungsi integral eliptik.

DAFTAR PUSTAKA

- Albayrak, E. (2001), "Calculation of the Potential and Electric Flux Lines for Parallel Plate Capacitors with Symmetrically Placed Equal Lengths by Using the Method of Conformal Mapping", *Turk J Phy*, Vol.25, pp.181-193.
- Abdullah, B., Pramono, Y.H. and Yahya, E. (2012), "Analysis and Characterization Impedance of Microstrip Slot Antenna 3 Array Double Bowtie with CPW for 2.4 GHz Communication", *International Journal of Academic Research*, Vol.4, No.4, July.
- Borwein, J.M. and Borwein, P.B. (1984), "The Arithmetic Geometric Mean and Fast Computation of Elementary Function", *SIAM Review*, Vol.26, No.3, July.
- Borwein, J.M. and Borwein, P.B. (1987), "*Pi and the AGM*", Wiley, New York, pp.171-174.
- Balanis, C.A. (1997), "*Antenna Theory and Analysis*", 2nd edition, Wiley, New York.
- Batra, R.C., Porfiri, M., and Spinello, D. (2007), "Capacitance Estimate for Electrostatically Actuated Narrow Microbeams", *Micro & Nano Letters*, Vol.1, No.2, pp.71-73.
- Boettner, S. and Victor, H.M. (2010), "The integral in Gradshteyn and Ryzhik", Part 16: Complete Elliptic Integrals. *SCIENTIA, Series A: Mathematical Sciences*, Vol.20, pp.45-59.
- Boothalingam, N. and Karantharaj, P. (2012), "RF Phase Shifter using MEMS Switches on A Tapered Coplanar Waveguide", *Songklanakarin J. Sci. Technol*, Vol.34, No.6, pp.645-651, Nov-Dec.
- Collin, E.R. (1985), "*Antennas And Radiowave Propagation*", Ch.1, pp.1-12, McGraw-Hill Book.
- Collin, E.R. (2001), "*Foundation for Microwave Engineering*", Appendix, pp.889-896, IEEE Press Series.
- Carlson, B.C. (2009), "NIST; *Handbook of Mathematical Functions*". Mathematics Editor: Frank W.J.O., General Editor: Daniel, W.L., Information Technology Editor: Ronald F.B., Physical Sciences Editor: Charles W.C., Cambridge University Press, pp.486-92.
- Cattaneo, P.W. (2010), "Capacitance in Microstrip Detectors : A Conformal mapping approach", *Solid State*, Elsevier.
- Calixto, **W.P.**, Alvarenga, B., Jesus C.D.M., Leonardo D.C.B., Marcel, W., Aylton J.A., Luciano, M.N, and Carlos F.R. Lemos, A. (2010), "Electromagnetic Problems Solving by Conformal Mapping: A Mathematical Operator for

- Optimization”, *Mathematical Problems in Engineering*: Article ID 742039, December.
- Chakraborty, S., Bhattacharya, A., Chaudhuri, A.R. and Bhattacharya, T.K. (2010), “Development and Characterization of Micro-Machined MEMS Based Varactor”, *International Journal of Smart Sensing and Intelligent Systems*, Vol.3, No.1, pp.94-107, March.
- Chen, T., John, R.B., Nicola, B. (2014), “Analytical Solution for Capacitance Calculation of A curved Patch Capacitor that Conforms to the Curvature of A Homogeneous Cylindrical Dielectric Rod”, *Applied Physics Letters*, 104, 032901.
- Dressel, M., and Gritner, G. (2002), “*Electromagnetic of Solid*”, Ch.9, p.219, Cambridge University Press.
- Eidenberger, N., Zagar, B.G. (2012), “Capacitive Sensor Design Utilising Conformal Mapping Methods”, *International Journal on Smart Sensing And Intelligent System*, Vol.5, No.1.
- Fenton, J.D. and Gardiner G. (1982), “Rapidly Convergent Method for Evaluating Theta and Elliptic Integral, *J. Austrak.Math.Soc* (Series B) 24.
- Glasser, M. (1976), “Definite Integrals of the Complete Elliptic Integral”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B. Mathematical Sciences*, 80B(2), pp.313-23, April-June.
- Ghione, G., and Naldi, C. (1984) “Analytical Formulas for Coplanar Lines in Hybrid and Monolithic MICs”, *Electron. Lett*, Vol.20, No.4, pp.179–181, March.
- Gevorgian, S.S., Martinsson, T., Peter, L., Linner, J., and Kollberg, E.L. (1996), “CAD Models for M Multilayered Substrate Interdigital Capacitors”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, Vol.44, No.6, pp.896-904, June.
- Guha, D., and Yahia, M.M.A. (2011), “*Microstrip and Printed Antennas*”, Ch. Preface, John Wiley and Son.
- Hilberg, W. (1969), “From Approximations to Exact Relations for Characteristic Impedances”, *IEEE Transction of Microwave Theory and Techniques*, Vol-MTT-17, N0.5, May.
- Hosseini, M. Guchuan, Z., Yves, A.P. (2007), “A New Formulation of Fringing Capacitance and Its Application to the Control of Parallel-Plate Electrostatic Micro Actuators”, *Analog Integr Circ Sig Process*, Vol.53, pp:119-128.
- Himanshu, A. Anil, K. (2016), “Design of Frequency-Reconfigurable Microstrip Patch Antenna”, *Indian Journal of Science and Technology*, Vol.9, No.22, June.
- Igreja, R. and Dias, C.J. (2004), “Analytical Evaluation of the Interdigital Electrodes Capacitance for A Multi-layered Structure”, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol.112, issues 2-3, pp.291-301, May.

- Kabilan, A.P., Caroline, P.E., and Christina, X.S. (2009), "Optical MEMS Based Signal Processor for Smart Antenna in Mobile broad-band communication", *International Journal of Microwave and Optical Technology (IJMOT)*, Vol.4, No.1. January.
- Kusumawati, E.R., Pramono, Y.H., and Rubiyanto, A. (2012), "Reconfigurable Dipole Microstrip Antenna using Solar Cell as Substrate Controlled by Optical Source", *Proc.3rd International Symp.MICEEI*, pp.221-224, Makasar Nov-Dec.
- Kouzaev, G.A. (2013), "*Applications of Advanced Electromagnetics, Components and Systems*", Lecture Notes in Electrical Engineering, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp.61-73.
- Kumar, R.J.S.J. and Jayasingh, J.R. (2016), "Multipurpose Chill-mat using Enhanced Cable-less Power Transfer Technology", *Indian Journal of Science and Technology*, 9(20), May,.
- Kusumawati, E.R., Gunawan, W.H., Pramono, Y.H, and Rubiyanto, A. (2016), "The Effect of various angles of V-shaped CPS on the antenna characteristics", *International Journal of Microwave and Optical Technology (IJMOT)*, Vol.11, No.6, Nov.
- Love, A.E.H. (1923), "Proc. Land. Math. Soc.", *Series*, Vol.2, No.22, p.337.
- Liang, C.H. (2010), "Progress In Electromagnetics Research, *Letters*, Vol.19, pp.113-125.
- Muzaffar, H. and Williams, K.S. (2006), "Evaluation of Complete Elliptic Integrals of the First Kind at Singular Moduli", *Taiwanese Journal of Mathematics*, Vol. 10. No. 6, pp. 1633-1660, December.
- Melkumov, V.N., Chuykin, S.V., Sklyarov, K.A., Kolosov A.I. (2016), "Conformal Mapping in Mathematical Modelling of Air Flows in Premises", *Indian Journal of Science and Technology*, Vol.9, No. 18, May.
- Nehari, Z. (1952), "*Conformal Mapping*", Ch.VI, p.280, McGraw-Hill Book Company.
- Nayak, R., Maiti, S., and Patra, S.K. (2016), "Design and Simulation of Compact UWB Bow-tie Antenna with Reduced End-Fire Reflections for GPR Applications", *IEEE International Conference on Wireless Communications, Signal Processing and Networking (WiPNET)*, Chennai, India, 23-28 March.
- Palmer, H.B. (1937) "The Capacitance of a Paralell-Pate Capacitor by The Schwarz-Cristoffel Transformation", Member AIE.
- Penny, J. and Lindfield, G. (1994), "*Numerical Method Using Matlab*", Ellis Horwood, pp.108-112.

- Pozar, D.M. (2001), "*Microwave and RF Design of Wireless System*", Wiley New York.
- Powell, J. (2001), "Antenna Design For Ultra Wide Band Radio", *B.S, Electrical Engineering*, New Mexico State University.
- Pradyot, K. and Reena, P. (2010), "L-Probe Fed Planar-Rectangular Microstrip Patch Antenna Mounted on a Cylindrical Ground Surface", *International Journal of Microwave and Optical Technology (IJMOT)*, Vol.5, No.2, March.
- Qureshi, M.I. and Kaleem, A. (2011), "Analytical Solution of Differential Equation Associated with Simple Pendulum", *Gen. Math. Notes*, 3(2), pp.50-8.
- Ramesh, G., Bhartia, P., Bahl, I., Ittipiboon, A. (2001), "*Microstrip Antenna Design Handbook*", Artech House Antennas and Propagation Library.
- Rahayu, V., Yokokaw, K., Cheng, Q., and Pramono, Y.H. (2014), "DOA estimation of linear patch antenna array using USV-MUSIC algorithm", *IEICE Tech. Report on APMC (Asean Pasific Microwave Conference)*, Sendai, Japan, 28 August.
- Rameswarudu, E.S., Sridevi, P.V. (2016), "A Novel Triple Band Planar Microstrip Patch Antenna with Defected Ground Structure", *Indian Journal of Science and Technology*, 9(3). DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i3/84674, January.
- Rohedi, A.Y., Widodo, B., Yahya, E., Pramono, Y.H. (2017a), "The New Hilberg Iteration Schemes of Elliptic Integral Function for Designing All of Microstrip Antennas based on CPW Structures", *International Journal of Microwave and optical technology (IJMOT)*, Vol.12, No.4, July.
- Rohedi, A.Y., Pramono, Y.H., Widodo, B., Yahya, E. (2017b), "The Novelty of Infinite Series for the Complete Elliptic Integral of The First Kind", Submitted to KSIAM Journal, South of Korea, doi:10.20944/preprints2016068.0215.v1, Status : Under Review.
- Rohedi, A.Y., Widodo, B., Yahya, E., Pramono, Y.H. (2017c), "New Empirical Formula of Parallel Plate Capacitor", Submitted to *International Journal of Microwave and Science Technology (IJMST)*, Status : Under Review.
- Schneider, M.V. (1969), "Microstrip-Lines for Integrated Circuits", *The Bell System Technical Journal*, pp.1421-1444, May-June.
- Salamin, E. (1976), "Computation of π Using Arithmetic Geometric Mean", *Mathematics of Computation*, 30(135), p.565-70, July.
- Sadiku, M.N.O. (1985), "*Elements of Electromagnetics*", ch.11 & ch.13, Sixth Edition, Oxford University Press.

- Simons, R.N. (2001), "*Coplanar Waveguide Circuits Components and Systems*", John Wiley and Sons, Inc, pp.20-21.
- Salahuddin (2013), "Few Indefinite Integrals Involving Hypergeometric Function", *International Research Journal of Pure Algebra*, Vol.3, No.10, pp.301-306.
- Tobin, A.D. and Trefeten, L.N. (2002), "*Schwarz-Cristoffel Mapping*", Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics.
- Veyres, C., and Hanna, F. (1980), "Extension of the Application of Conformal Mapping Techniques to Coplanar Lines with Finite Dimensions", *Int. J. Electronics*, Vol.48, No.1, pp.47-56.
- Vanderlinde, J. (2004), "*Classical Electromagnetic Theory*", Kluwer Academic Publisher, 2nd edition, pp.115-125.
- Verma, A.K., Awasthi, Y.K., and Himanshu, S. (2009), "Closed-form Model of W/h-Dependent Equivalent Isotropic Relative Permittivity of Microstrip on Multilayer Anisotropic Substrate", *International Journal of Microwave and Optical Technology (IJMOT)*, Vol.4, No.2, March.
- Wen, C.P. (1969), "Coplanar Waveguide: A surface Strip Transmission Line Suitable for Nonreciprocal Gyromagnetic Device Applications", *IEEE Transaction of Microwave Theory and Techniques*, Vol-MTT-17, N0.12.
- Wheeler, H.A. (1977), "Transmission-Line Properties of a Strip on a Dielectric Sheet on a Plane", *IEEE Transactions On Microwave Theory And Techniques*, Vol.MTT-25, No.8.
- Wei, H.D., Hong, C.X., Jian, W.Z., Wei, X.D., Rui, S.Z., and Hui, Y.Y. (2012), "An Analytical Model for Coplanar Waveguide on Silicon-on-Insulator Substrate with Conformal Mapping Technique", *Chin. Phys. B*, Vol.20, No.1.
- Xiang, Y. (2005), "The Electrostatic of An Inclined Plate Capacitor", *Journal of Electrostatic*, Elsevier.
- Yuwono, L. dan Pramono, Y.H. (2005) "Karakterisasi Antena Mikrostrip Patch 3 GHz Secara Simulasi FDTD (Finite Difference Time Domain) dan Eksperimen", *Jurnal Fisika FLUX*, Vol 2, No 3, hal 601061-601066, Agustus.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BIODATA PENULIS



Nama : ALI YUNUS ROHEDI
Tempat/Tanggal Lahir : Bangkalan/14-05-1967
Pekerjaan : Dosen
Alamat : Keputih Permai II blok A-14,
Kel.Keputih, Kec.Sukolilo,
Kodya Surabaya
Email : rohedi@physics.its.ac.id

Riwayat Pendidikan

1. SDN Blega 1, Bangkalan, Th.1980
2. SMPN 1 Blega, Bangkalan, Th.1983
3. SMAN 1 Bangkalan, Th.1986
4. S1 Fisika FMIPA-ITS, Surabaya, Th 1991
5. S2 Opto Elektro Teknik dan Aplikasi Laser, UI, Jakarta, 1997
6. S3 Fisika FMIPA-ITS, Surabaya, Th.2017

Daftar Publikasi

A. Jurnal International Terakreditasi Scopus

1. Rohedi, A.Y., Widodo, B., Yahya, E., Pramono, Y.H. (2017), "The New Hilberg Iteration Schemes of Elliptic Integral Function for Designing All of Microstrip Antennas based on CPW Structures", *International Journal of Microwave and optical technology (IJMOT)*, Vol.12, No.4, July.

B. Paper dengan Status Under Review Pada Jurnal International Terakreditasi Scopus

1. Rohedi, A.Y., Pramono, Y.H., Widodo, B., Yahya, E. (2017), "The Novelty of Infinite Series for the Complete Elliptic Integral of The First Kind", Submitted to KSIAM.Journal, South of Korea, doi:10.20944/preprints 2016068.0215.v1, Status : Under Review.
2. Rohedi, A.Y., Widodo, B., Yahya, E., Pramono, Y.H. (2017), "New Empirical Formula of Parallel Plate Capacitor", Submitted to *International Journal of Microwave and Science Technology (IJMST)*, Status : Under Review.

C. Seminar International Terindex Scopus

1. Ali Yunus Rohedi, Basuki Widodo, Eddy Yahya, Yono Hadi Pramono, 2016, "Application of Conformal Mapping for Designing Coplanar Structure of Chemical Devices Using Logarithmic Transformation", *The 3rd International Seminar on Fundamental and Application of Chemical Engineering (ISFAChe)*, Novembre 1-2, Surabaya.

D. Kegiatan Lain Selama Studi

1. Pelatihan Penulisan Jurnal Internasional yang digelar Perpustakaan ITS bekerjasama dengan Elsevier, 2014.
2. Pelatihan Penulisan Jurnal Internasional yang digelar Prodi Pascasarjana Fisika, FMIPA-ITS, 2016.

E. Beasiswa

1. Beasiswa BPDN dari Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DITJEN DIKTI) Indonesia, 2013-2017.